

Р.Л. Політанський¹, З.М. Нитребич², Р.І. Петришин¹, І.Т. Когут³, О. М. Маланчук⁴,
М.В. Вісьтак⁴

Моделювання поширення електромагнітних коливань методом модифікованого рівняння телеграфної лінії

¹Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна, r.politansky@chnu.edu.ua

²Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, Україна, znytrebich@gmail.com

³Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ, Україна,
igorkohut2202@gmail.com

⁴Львівський національний медичний університет імені Данила Галицького, Україна, м. Львів, oksana.malan@gmail.com

У роботі розглянуто фізичні процеси, що пов'язані з поширенням електромагнітних коливань у довгій лінії, розміри якої є співрозмірними або перевищують довжину електромагнітної хвилі. В якості методу дослідження було використано диференціально-символьний метод, який був застосований до модифікованого рівняння телеграфної лінії. Параметрами керування процесом поширення електромагнітних коливань є граничні умови для двоточкової задачі, а також додаткові параметри, що є коефіцієнтами при перших похідних за координатою і часом у порівнянні із класичним рівнянням телеграфної лінії. На основі диференціально-символьного методу було знайдено граничні умови двоточкової задачі, при яких у довгій лінії реалізовані найбільш характерні коливні процеси. На основі проведених досліджень можна зробити висновки про ефективність застосування аналітичних методів для аналізу конкретних технічних об'єктів та керування процесами, які у них відбуваються.

Ключові слова. телеграфна лінія, двоточкова задача.

Подано до редакції 05.02.2021; прийнято до друку 10.03.2021.

Вступ

Розвиток телекомунікаційних технологій спричинив активний пошук нових технологій передачі інформації, що використовують складні хаотичні сигнали [1] та методи обробки сигналів [2] та їхньої модуляції із застосуванням систем штучного інтелекту [3]. Перехід у нові частотні діапазони та ускладнення процесів обробки сигналів спричинив пошук нових моделей та методів у радіотехнічних системах [4, 5].

Іншим прикладом, де необхідний точний розрахунок перехідних процесів, фази та амплітуди коливань у струмопідвідних колах є первинні пристрої вимірювальних систем. Так, високочутливі оптичні сенсори є перспективними для якісного та кількісного аналізу шкідливих речовин, у тому числі

й біохімічних речовин [6-8]. Методи комп'ютерного моделювання, які призначені для розрахунку характеристик цих приладів [9] та прецизійного вибору їх параметрів потребують точного розрахунку високочастотних процесів, що відбувається у сигнальних колах [10], і уточнені моделі поширення електромагнітних коливань можуть вирішити цю проблему.

Однією серед найбільш досліджених задач електродинаміки є задача поширення електромагнітних коливань у довгій лінії [11, 12]. Довгу лінію утворюють два або більше паралельних ізолюваних між собою провідників, відстань між якими є набагато меншою за їхню довжину. Еквівалентна електрична схема заміщення довгої лінії приводиться на рис. 1.

Схема заміщення дозволяє побудувати математичну модель довгої лінії, що називається

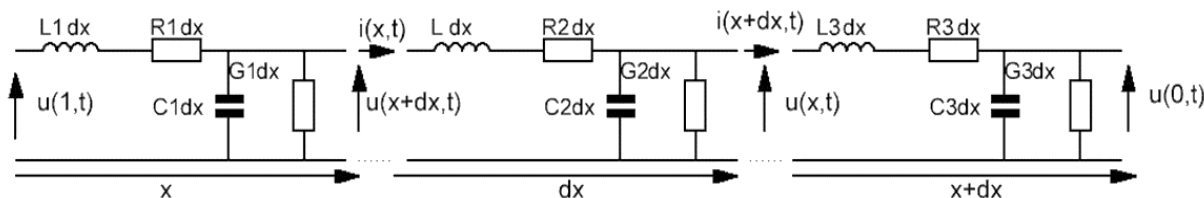


Рис. 1. Схема еквівалентного електричного кола довгої лінії.

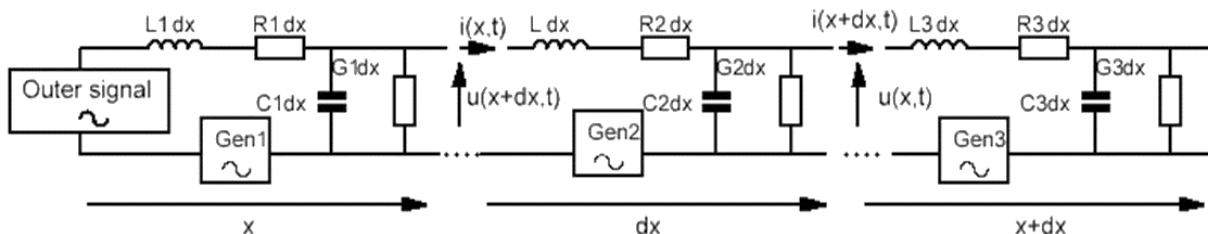


Рис. 2. Схема заміщення модифікованої довгої лінії (із додатковими джерелами струму і напруги).

телеграфним рівнянням [13, 14]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = r \cdot i + l \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = g \cdot u + c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

У системі (1) невідомими задачі є струм $i(x, t)$ та напруга $u(x, t)$ в лінії, що у загальному випадку є функціями координати x та часу t . У цьому рівнянні ми припускаємо, що лінія є однорідною, і замінюємо усі точкові значення опорів, провідності, індуктивності та ємності на питомі величини, що приведені до одиниці довжини схеми: r – питомий опір, Ом/м; g – питома провідність, См/м; l – питома індуктивність, Гн/м; c – питома ємність, Ф/м.

Використовуючи закон Ома, виводимо із системи (1) одне рівняння другого порядку відносно однієї невідомої функції $u(x, t)$ [15, 16]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + C \cdot U \quad (2)$$

де α , D , і C є новими параметрами математичної моделі. Звернемося до фізичного змісту вказаних параметрів, що зв'язані з електрофізичними параметрами системи наступними співвідношеннями:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{l \cdot c}}; \quad D = l \cdot g + r \cdot c; \quad C = r \cdot g \quad (3)$$

Параметр α є сталим для усієї лінії і визначає частоту коливань струму і напруги. Параметр D відіграє роль показника затухання амплітуди коливань, що пов'язано із можливими втратами енергії у процесі поширення хвилі у середовищі із активним опором вздовж лінії та провідністю між проводами, що її утворюють. Параметр C впливає на частотні характеристики системи, змінюючи частоту

коливань, як це нами показано у наступнім розділі.

У роботі досліджено вплив як двоточкових умов за часом, так і згаданих вище параметрів у знайдених розв'язках. Цими розв'язками є експоненційне спадання або зростання амплітуди коливань та спадаючі коливання.

Значним обмеженням класичної моделі є те, що вона не забезпечує вирішення задачі активної лінії, що містить додаткові джерела струму та/або напруги. Разом із тим введення додаткових джерел струмів та/або напруг може значно змінити хвильовий процес. Для того, щоб надати цьому процесу властивостей контрольованого, потрібно заздалегідь знати усі можливі типи хвиль, що можуть бути реалізовані. Схема заміщення модифікованої однорідної довгої лінії зображена на рис. 2.

Для моделювання однорідної довгої лінії із зовнішніми джерелами струмів та/або напруг, яку ми у подальшому називатимемо активна довга однорідна лінія без втрат, нами запропоновано модифіковане рівняння телеграфної лінії, у якому вплив зовнішніх джерел змодельований шляхом додавання перших похідних за часом та координатою поширення хвилі.

Модифіковане рівняння телеграфної лінії має наступний вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + CU \quad (3)$$

Модифікація цього рівняння шляхом уведення доданків, які являють собою перші похідні за часом і координатою дає можливість збільшити кількість можливих розв'язків рівняння, що охоплюють ширший спектр процесів. На практиці така модифікація означає ускладнення фізичної системи.

I. Розрахунок процесів у довгій лінії із накладеними умовами двоточкової задачі

1.1. Фізичні параметри задачі та їх фізичний зміст

Розглянемо довгу лінію задавши значення погонної індуктивності, ємності, опору та провідності, що є характерними для поширенням високочастотних електромагнітних коливань із частотою $f = 3 \cdot 10^8$ Гц, погонна індуктивність: $l = 0.2 \cdot 10^{-6}$ Гн/м, погонна ємність $c = 2 \cdot 10^{-11}$ Ф/м, погонний опір $r = 3 \cdot 10^{-7}$ Ом/м (алюміній), погонна провідність $g = 10^{-3}$ См/м (грунт середньої вологості). Тоді значення коефіцієнтів α , D , і C визначаються обраними електрофізичними параметрами: $\alpha = 5 \cdot 10^8$ с/м (параметр, що визначає частоту коливань), $D = 2 \cdot 10^{-10}$ с/м² (параметр, що визначає здатність лінії поглинати електромагнітну енергію за рахунок витоку струмів провідності), $C = 3 \cdot 10^{-10}$ 1/м² (за

фізичним змістом це коефіцієнт підсилення зміни градієнту напруги вздовж лінії, він визначається погонними опором r та питомою провідністю g у лінії).

Далі розглянемо двоточкову задачу із умовами за часом типу Діріхле (4) для двох типів граничних умов, а саме для сталого значення та періодичної за координатою x функції:

$$\begin{cases} u(0, x) = \varphi_1(x), \\ u(l, x) = \varphi_2(x), \end{cases} \quad (4)$$

1.2. Сталі двоточкові умови вздовж довгої лінії напруги

Розглянемо двоточкову задачу із граничними умовами у вигляді сталої напруги, що прикладена вздовж лінії у початковий момент часу $t = 0$ та у деякий інший момент часу $t = l$. Використовуючи диференціально-символьний метод [17-20], можемо записати узагальнений розв'язок двоточкової задачі (3), (4) у наступному вигляді:

$$U(x, t) = - \frac{e^{-\frac{\alpha^2 Dt}{2}} \left[c_1 \cdot \sinh(\alpha(t-l)/2 \cdot \sqrt{(\alpha D)^2 - 4C}) - c_2 e^{\frac{\alpha^2 D l}{2}} \cdot \sinh(\alpha t/2 \cdot \sqrt{(\alpha D)^2 - 4C}) \right]}{\sinh(\alpha l/2 \cdot \sqrt{(\alpha D)^2 - 4C})} \quad (5)$$

Очевидно, що характер хвильового процесу визначається знаком підкореневого виразу $(\alpha D)^2 - 4C$, але для обраних значень параметрів перший доданок значно перевищує другий, тому підкореневий вираз завжди матиме додатне значення для коливань електромагнітної природи.

Для подальших обчислень використовуємо значення часової константи $l = 10^{-6}$ с, або 1 мікросекунда. Це значення обране із міркувань можливості подачі напруги, або її вимірювання у заданий момент часу. Точність визначення цього моменту часу становить не менше 0,1 мікросекунди, що є цілком реальним значенням для сучасних радіоелектронних приладів. Далі, використовуючи наближене значення підкореневого виразу $(\alpha D)^2 - 4C \approx (\alpha D)^2$ та наближене значення для

$\sinh(\alpha l/2 \cdot \sqrt{(\alpha D)^2 - 4C}) \approx e^{\frac{\alpha^2 D l}{2}}$, запишемо розв'язок задачі у зручному для аналізу вигляді:

$$U(x, t) \approx c_2 + (c_1 - c_2) \cdot e^{-\alpha^2 D t} \quad (6)$$

На рис. 3 приведені часові залежності напруги в лінії для двох випадків: а) зростання напруги, б) її спадання. Значення граничних умов для випадку зростання становили: $c_1 = 1$ В, $c_2 = 2$ В. Для випадку спадання граничні умови мали значення: $c_1 = 2$ В, $c_2 = 1$ В.

Таким чином, якщо граничними умовами двоточкової задачі є стала вздовж довгої лінії напруга, то у системі відбувається експоненційне спадання або зростання напруги, залежно від того,

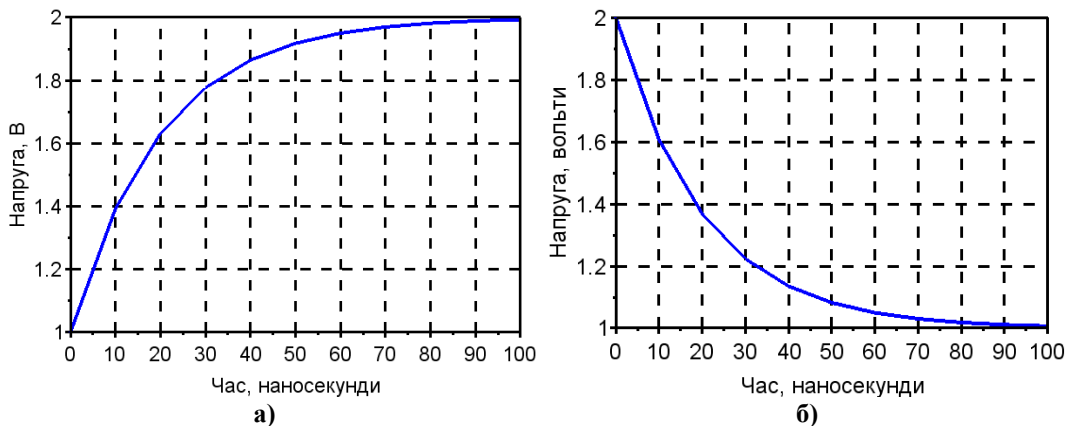


Рис. 3. Часова залежність амплітуди коливань у телеграфній лінії для сталих граничних умов та констант, що відповідають процесу поширення електромагнітної хвилі у телеграфній лінії, а) зростання напруги $c_1 = 1$ В, $c_2 = 2$ В, б) спадання напруги $c_1 = 2$ В, $c_2 = 1$ В.

яке із значень напруги є більшим: у початковий, чи у деякий інший момент часу. Перебіг процесу за таких умов не залежить від координати x , тобто напруга має однакові значення для усієї лінії у будь-який момент часу. Декремент затухання визначається значеннями параметрів α і D , і його значення становить: $\chi = \alpha^2 D = 5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$.

1.3. Двоточкові умови задачі у вигляді періодичної за просторовою змінною функції

Розглянемо випадок з періодичними умовами двоточкової задачі, у яких задано значення напруги у початковий момент $t=0$ та деякий інший момент часу $t=l$ у вигляді періодичної за координатою функції. У

якості періодичної умови використаємо найпростішу періодичну функцію, а саме є гармонічне коливання. Тоді граничні умови задачі мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} U(0, x) = \varphi_1(x) = c_1 \sin(n_1 x) \\ U(l, x) = \varphi_2(x) = c_2 \sin(n_2 x) \end{cases}, \quad (7)$$

де n_1 та n_2 є довільними дійсними числами.

Загальний розв'язок з точністю до множників c_1 і c_2 для даних умов (7) двоточкової задачі визначається за фундаментальними розв'язками звичайного диференціального рівняння (3):

$$U(t, x) = \frac{1}{2i} \{ c_1 \cdot [\hat{G}_1(t, \mu) e^{\mu x}]|_{\mu=in_1} - c_1 \cdot [\hat{G}_1(t, \mu) e^{\mu x}]|_{\mu=-in_1} + c_2 \cdot [\hat{G}_2(t, \mu) e^{\mu x}]|_{\mu=in_2} - c_2 \cdot [\hat{G}_2(t, \mu) e^{\mu x}]|_{\mu=-in_2} \}, \quad (8)$$

$$\text{де } \hat{G}_1(t, \mu) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 D t} \cdot \sinh[\frac{1}{2}\alpha(l-t)\eta(\mu)]}{\sinh[\frac{1}{2}\alpha\eta(\mu)]}, \quad \hat{G}_2(t, \mu) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 D(t-l)} \cdot \sinh[\frac{1}{2}\alpha t\eta(\mu)]}{\sinh[\frac{1}{2}\alpha\eta(\mu)]}.$$

Знайдемо спочатку значення функції $\eta(\mu)$ для значень $\mu = \pm in_1, \pm in_2$:

$$\eta(\pm in_1) = \sqrt{(\alpha D)^2 + 4 \cdot (-n_1^2 \mp in_1 B - C)} \quad (9a)$$

$$\eta(\pm in_2) = \sqrt{(\alpha D)^2 + 4 \cdot (-n_2^2 \mp in_2 B - C)} \quad (9b)$$

Знайдемо розв'язки рівняння для $B = 0$. Оскільки значення констант $(\alpha D)^2 = 0.01$ і $C = 3 \cdot 10^{-10}$, то $4 \cdot n_{1,2}^2 \gg (\alpha D)^2 \gg C$, і значення $\eta(\mu)$ можна наближено вважати рівними:

$$\eta(\pm in_1) \approx i \cdot 2n_1 \quad (10a)$$

$$\eta(\pm in_2) \approx i \cdot 2n_2 \quad (10b)$$

Запишемо окремі доданки виразу (8):

$$[\hat{G}_1(t, \mu) e^{\mu x}]|_{\mu=in_1} = e^{(-\frac{1}{2}\alpha^2 D t + in_1 x)} \cdot \frac{\sinh[i\alpha(l-t)n_1]}{\sinh[i\alpha n_1 l]} = \frac{e^{(-\frac{1}{2}\alpha^2 D t + in_1 x)}}{\sin(\alpha l n_1)} \cdot \sin[\alpha(l-t)n_1] \quad (11a)$$

$$[\hat{G}_1(t, \mu) e^{\mu x}]|_{\mu=-in_1} = \frac{e^{(-\frac{1}{2}\alpha^2 D t - in_1 x)}}{\sin(\alpha l n_1)} \cdot \sin[\alpha(l-t)n_1] \quad (11b)$$

$$[\hat{G}_2(t, \mu) e^{\mu x}]|_{\mu=in_2} = \frac{e^{[-\frac{1}{2}\alpha^2 D(t-l) + in_2 x]}}{\sin(\alpha l n_2)} \cdot \sin[\alpha t n_2] \quad (11v)$$

$$[\hat{G}_2(t, \mu) e^{\mu x}]|_{\mu=-in_2} = \frac{e^{[-\frac{1}{2}\alpha^2 D(t-l) - in_2 x]}}{\sin(\alpha l n_2)} \cdot \sin[\alpha t n_2] \quad (11r)$$

Підставляючи отримані вирази у формулу (8), запишемо загальний розв'язок у зручному для аналізу вигляді:

$$U(t, x) \approx e^{-\chi t} \cdot [A_1 \cdot \sin(n_1 x) \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A \cdot \sin(n_2 x) \cdot \sin(\omega_2 t)] \quad (12)$$

Як і раніше, запишемо значення коефіцієнту затухання χ , частоти коливань ω_1 та ω_2 , фазовий зсув φ_l , амплітуди коливань A_1 та A_2 :

Коефіцієнт затухання коливань залежить від параметрів лінії, як і для задачі з сталими граничними умовами: $\chi = \alpha^2 D / 2 = 2.5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$. Частоти коливань також визначаються як параметрами лінії, так і двоточковими умовами задачі: $\omega_1 = \alpha n_1$; $\omega_2 =$

αn_2 . Фазовий зсув φ_l визначається як параметрами лінії, так і значенням моменту часу, в умові двоточкової задачі: $\varphi_l = \alpha l n_1$. Амплітуди коливань визначені через константи, що задають граничні умови c_1, c_2, n_1, n_2 та параметрами лінії: $A_1 = c_1 / \sin(\alpha l n_1)$, $A_2 = c_2 e^{\frac{\alpha^2 D l}{2}} / \sin(\alpha l n_2)$.

У попередньому прикладі було визначено значення часової константи $l = 10^{-6} \text{ с} = 1 \text{ мкс}$. У

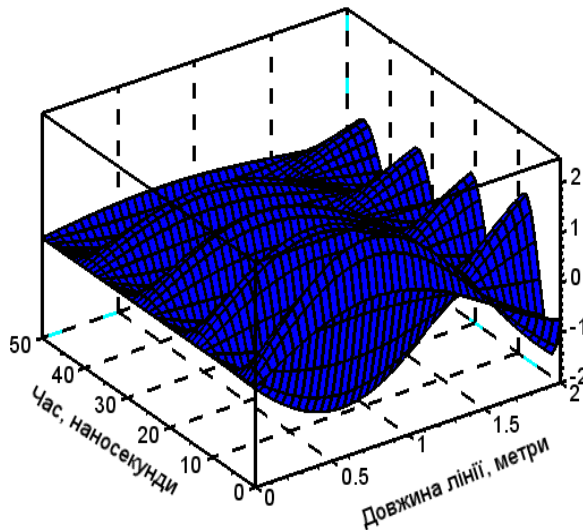


Рис. 4. Просторово-часова залежність амплітуди коливань у телеграфній лінії для періодичних умов задачі та констант, що відповідають процесу поширення електромагнітної хвилі у телеграфній лінії.

цьому випадку у виразі для амплітуди A_2 виникає великий за модулем множник e^{25} . Тому для визначення граничних умов двоточної задачі, що можуть бути фізично реалізованими, можемо встановити значення $c_2 = 0$, що еквівалентно умові $U(l, x) = \varphi_2(x) = 0$. Для таких умов формуються одночастотні згасаючі коливання:

$$U(t, x) = A_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(n_1 x) \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (13)$$

Приведемо результати чисельного моделювання для значень параметрів: $c_1 = 1$ В; $n_1 = 2$; $A_1 = -1,21$ В; $\omega_1 = 2\alpha = 10^9$ Гц; $\varphi_1 = 1000$ рад, або з точністю до повної фази коливань: $\varphi_1 = 0,97$ рад.

Просторово-часову залежність коливань у довгій

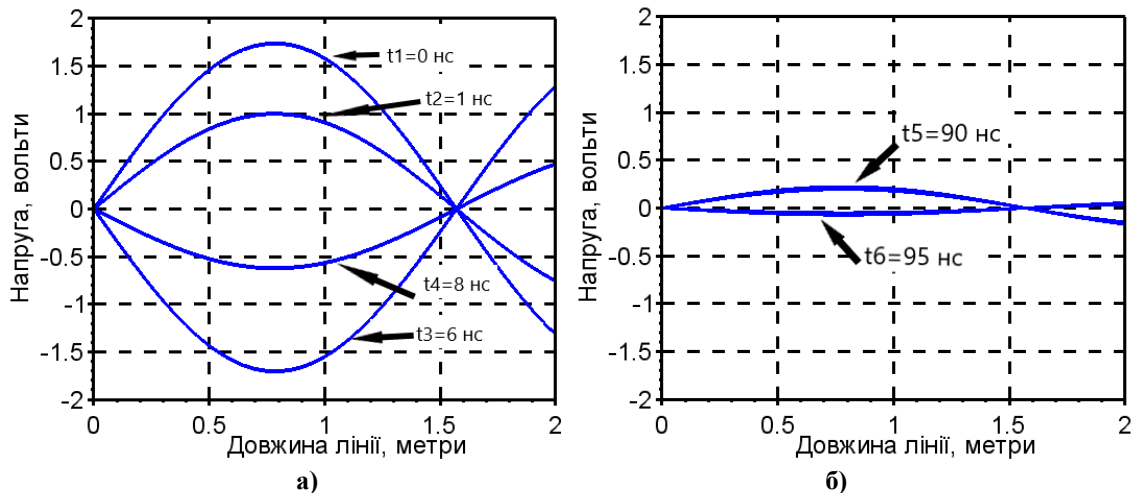


Рис. 5. Розподіл напруги вздовж лінії: а) на початку процесу (максимальна амплітуда коливань), б) наприкінці процесу (зменшена амплітуда коливань).

лінії подано на рис. 4.

На рис. 5 зображено епюри розподілу напруги по довжині лінії з метою демонстрації їхньої динаміки у часі. Так, на рис. 5а подано графіки епюри напруги на початку коливного процесу одразу після прикладання напруги до довгої лінії, а на рис. 5б – наприкінці коливного процесу (приблизно через 90 наносекунд після прикладання напруги до лінії), коли амплітуда коливань значно зменшилась.

Цікавим є те, що частота цих коливань може не співпадати із частотою вільних коливань системи. На підставі цього можна зробити висновок, що довга лінія може слугувати пристроєм для генерування високочастотних коливань, що можуть перевищувати власну частоту коливань системи. Для цього потрібно задати початковий розподіл напруги у лінії, який описується гармонічною синусоїдною функцією (рис. 5а).

II. Обговорення результатів і висновки

Іншим аспектом застосування диференціально-символьного методу для двоточної задачі є можливість контролю за перебігом процесів у довгій лінії. Вимірювання значень процесу лише у два довільних часових моменти дозволяє одержати повну картину про значення напруги, або струму у лінії. При цьому залишається відкритим питання про апроксимацію дискретної множини вимірних значень аналітичною функцією з метою одержання точного розв'язку.

Використання двоточкових умов може бути ефективним методом контролю за станом довгої лінії, оскільки вимірювання значень амплітуди коливань фізичних величин у лінії може дати повну картину усього фізичного процесу. Зокрема, такий метод дозволяє передбачити небажані зростання амплітуди, що може спричинити пошкодження пристрою.

Кола з розподіленими параметрами відіграють важливу роль у освоєнні височастотного діапазону електромагнітних коливань. Зокрема, такі кола можуть передавати високочастотну енергію (відкриті двопровідні лінії та коаксіальні кабелі). На ультракоротких хвилях відрізки таких ліній можна використовувати як смугові фільтри або резонатори. Їх можна використовувати для вимірювання довжини хвилі, амплітуди коливань, резистивних та реактивних опорів.

Політанський Р.Л. - д.т.н., професор;
Нитребич З.М. - д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри вищої математики;
Петришин Р.І. - д.ф.-м.н., професор, ректор;
Когут І.Т. - д.т.н., професор, завідувач кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки;
Маланчук О.М. - к.ф.-м.н., доцент;
Вістьак М.В. - д.т.н., професор.

- [1] R. Politanskyi, M. Klymash, 2019 3rd International Conference on Advanced Information and Communications (Lviv, 2019), p. 390 (<https://doi.org/10.1109/AIACT.2019.8847908>).
- [2] Y. Bobalo, L. Nedostup, M. Kiselychnyk, M. Melen, Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE), 17th International Conference (2016), p.1 (<https://doi.org/10.1109/CPEE.2016.7738753>).
- [3] S.D. Galiuk, M.Y. Kushnir, R.L. Politanskyi, 21st International Crimean Conference^ Microwave and Telecommunication Technology (2011), p. 423.
- [4] A. Veryga, R. Politanskyi, V. Lesynskyi, T. Ruda, 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunication and Computer Engineering (Lviv-Slavske, 2020), p. 162 (DOI: 10.1109/TCSET49122.2020.235414).
- [5] Y. Bobalo, M. Kiselychnyk, L. Nedostup, Przegląd Elektrotechniczny 86, 124 (2010).
- [6] Z. Mykytyuk, G. Barylo, V. Virt, M. Vistak, I. Diskovskiyi, Y. Rudyak, International Scientific-Practical Conference on Problems of Infocommunications, Science and Technology (Kiyv, 2018), p. 177 (<https://doi.org/10.1109/INFOCOMMST.2018.8632115>).
- [7] O. Sushynskiyi, M. Vistak, V. Dmytrah, 13th International Conference on Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science (Lviv-Slavske, 2016), p. 418 (<https://doi.org/10.1109/TCSET.2016.7452075>).
- [8] Z. Hotra, Z. Mykytyuk, I. Diskovskiyi, G. Barylo, F. Vezyr, 14th International Conference on Advanced Trend in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (Lviv-Slavske, 2018), p. 716 (<https://doi.org/10.1109/TCSET.2018.8336300>).
- [9] R.L. Politanskyi, M.V. Vistak, G.I. Barylo, A.S. Andrushchak, Optical Materials 102, 109782 (2020) (<https://doi.org/10.1016/j.optmat.2020.109782>).
- [10] I.T. Kogut, V.I. Holota, A.A. Druzhinin, V.V. Dovhij, Journal of Nano Research 39, 228 (2016) (<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/JNanoR.39.228>).
- [11] K. Narahara, Journal of Applied Physics 100(6), 064908 (2006).
- [12] K. Narahara, T. Yamaki, T. Takahashi, T. Nakamichi, International Journal of High Speed Electronics and Systems 17(3), 577 (2007).
- [13] H. Shanak, O. Florea, N. Alshaikh, J. Asad. Acta Technica Napocensis, Ser.: Applied Mathematics and Engineering 63, 143 (2020).
- [14] M. Dehghan, A. Ghesmati, Eng. Anal. Boundary Elem. 34(1), 51 (2010).
- [15] M. Dehghan, A. Shokri, Numer. Methods Partial Differ. Equ. 24, 1080 (2008) (<https://doi.org/10.1002/num.20306>).
- [16] A. Ashyralyev, M. Modanli, Boundary Value Problems 41, 1 (2015) (<https://doi.org/10.1186/s13661-015-0302-z>).
- [17] Z. Nytrebych, O. Malanchuk, Italian J. of Pure and Appl. Mathematics 41, 242 (2019).
- [18] Z. Nytrebych, O. Malanchuk, J. Math. Sci. 227, 68 (2017).
- [19] Z. Nytrebych, O. Malanchuk, Demonstratio Mathematica 52(1), 88 (2019) (<https://doi.org/10.1515/dema-2019-0010>).
- [20] Z. Nytrebych, O. Malanchuk, Asian-European Journal of Mathematics 12(3), 1950037 (2019) (<https://doi.org/10.1142/S1793557119500372>).

R.L. Politanskyi¹, Z.M. Nytrebych², R.I. Petryshyn¹, I.T. Kogut³, O.M. Malanchuk⁴,
M.V. Vistak⁴

Simulation of the Propagation of Electromagnetic Oscillations by the Method of the Modified Equation of The Telegraph Line

¹*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine, r.politansky@chnu.edu.ua*

²*Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine, znytreych@gmail.com*

³*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine, igorkohut2202@gmail.com*

⁴*Danylo Halytsky Lviv National Medical University, Lviv, Ukraine, oksana.malan@gmail.com*

The physical processes associated with the propagation of electromagnetic oscillations in a long line, the size of which is the same or slightly greater than the length of the electromagnetic wave (not more than ten times) are considered in the work. As a research method, the differential-symbol method, which is applied to the modified equation of the telegraph line is used. The two-point conditions for the problem as well as additional parameters that are coefficients of the first derivatives in terms of coordinate and time in comparison with the classical equation of the telegraph line are considered as parameters for controlling the process of propagation of electromagnetic oscillations. Based on the differential-symbol method, the two-point in time conditions under which the most characteristic oscillatory processes are realized in a long line is found. Based on the research, it is possible to draw conclusions about the effectiveness of analytical methods for the analysis of specific technical objects and control of the processes that take place in them.

Keywords: telegraph line, two-point problem.