Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 519.217.4

Осипчук М.М.

ПРО ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ КІЛЬКОСТІ ПЕРЕТИНІВ ПОСЛІДОВНОСТІ РІВНІВ ДЕЯКОЮ ПОСЛІДОВНІСТЮ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Осипчук М.М. *Про граничний розподіл кількості перетинів послідовності рівнів деякою послідовністю дифузійних процесів // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 191–196.

У роботі розглядається граничний розподіл кількості перетинів деякого рівня послідовністю випадкових величин $\xi_n(0)$, $\xi_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $\xi_n\left(\frac{N}{m}\right)$ при прямуванні до нескінченності натуральних n, m, N деяким узгодженим способом. Тут $(\xi_n(t))_{t\geq 0}$, $n=1,2,\ldots,$ — дифузійний процес на дійсній прямій $\mathbb{R}$ з локальними характеристиками (переносом і коефіцієнтом дифузії) $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ і $(b_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$, що задаються рівностями $a_n(x)=na(nx)$, $b_n(x)=b(nx)$ для $x\in\mathbb{R}$ і $n=1,2,\ldots$ при деяких фіксованих функціях $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ і $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$.

Нехай на дійсній осі $\mathbb{R}$ задані обмежені неперервні функції $a(\cdot)$ і $b(\cdot)$ з дійсними значеннями. Будемо вважати, що $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} b(x)>0$. Тоді існує дифузійний процес $(\xi(t))_{t\geq 0}$ в $\mathbb{R}$, траєкторії якого є розв'язками стохастичного диференціального рівняння

$$d\xi(t)=a(\xi(t))dt+\sqrt{b(\xi(t))}dw(t). \tag{1}$$

Нехай, крім того, функції $a(\cdot)$ і $b(\cdot)$ задовольняють умову Гельдера. Тоді щільність $g(t,x,y)$ $(t>0,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R})$ відносно Лебегової міри в $\mathbb{R}$ ймовірності переходу процесу $\xi(t)$ є фундаментальним розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2}$$

Розглянемо функції

$$A(x)=\int\limits_0^x\frac{a(z)}{b(z)}dz,\quad F(x)=\int\limits_0^x e^{-2A(z)}dz,\quad H(x)=\int\limits_0^x e^{2A(z)}\frac{dz}{b(z)}\quad (x\in\mathbb{R}). \tag{3}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 60J60, 60H10.
Ключові слова і фрази: дифузійний процес, стохастичне диференціальне рівняння.

Припустимо, що функція $A(\cdot)$ обмежена.

Для кожного $n \geq 1$ покладемо $a_n(x) = na(nx)$, $b_n(x) = b(nx)$. Очевидно, що ці функції задовольняють всі згадані вище умови, і тому існує послідовність дифузійних процесів $\{(\xi_n(t))_{t\geq 0} : n \geq 1\}$, траєкторії яких є розв'язками рівнянь (1) з функціями $a_n(\cdot)$ і $b_n(\cdot)$.

В роботі [3] доведено (див. також [1], [2], [4]), що при умові існування границь

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x} F(x) = \varkappa_F, \quad \lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x} H(x) = \varkappa_H \tag{4}$$

послідовність дифузійних процесів $(\xi_n(t))_{t\geq 0}$ при $n \to +\infty$ слабко збігається до процесу $\frac{1}{\sqrt{\varkappa_F \varkappa_H}} w(t)_{t\geq 0}$, де $w(t)_{t\geq 0}$ — стандартний вінерів процес.

Для кожного набору натуральних чисел n, m, k та дійсного числа α визначимо випадкові величини $\zeta_k^{(n,m)}(\alpha)$, поклавши

$$\zeta_k^{(n,m)}(\alpha) = \begin{cases} 1, & (\xi_n\left(\frac{k-1}{m}\right) - \frac{\alpha}{n})(\xi_n\left(\frac{k}{m}\right) - \frac{\alpha}{n}) < 0; \\ 0, & (\xi_n\left(\frac{k-1}{m}\right) - \frac{\alpha}{n})(\xi_n\left(\frac{k}{m}\right) - \frac{\alpha}{n}) \geq 0. \end{cases}$$

Випадкова величина $\nu_N^{(n,m)}(\alpha) = \sum_{k=1}^{N} \zeta_k^{(n,m)}(\alpha)$ при всіх натуральних N задає кількість перетинів рівнів $\frac{\alpha}{n}$ послідовністю випадкових величин $\xi_n(0)$, $\xi_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $\xi_n\left(\frac{N}{m}\right)$.

В роботі [3] встановлено, що за умови виконання згаданих щодо функцій $a(\cdot)$ і $b(\cdot)$ умов та існування і обмеженості їх похідних, при $n \to +\infty$, $m \to +\infty$ так, що $\frac{n^2}{m} \to \tau$, $0 < \tau < +\infty$, має місце співвідношення

$$\lim \mathbb{P}_x \left(\frac{1}{n} \nu_{[mt]}^{(n,m)}(0) < y \right) = \mathbb{I}_{(0;+\infty)}(y) 2\Phi \left(\frac{y}{\gamma\sqrt{t}} + \frac{|x|}{\sqrt{t}} \sqrt{\varkappa_F \varkappa_H} \right) \quad (t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}),$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \text{ — функція Лапласа,}$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}} \left(\int_{-\infty}^{0} H'(y)dy \int_0^{\infty} g(\tau, y, z)dz + \int_0^{\infty} H'(y)dy \int_{-\infty}^{0} g(\tau, y, z)dz \right).$$

Нашим завданням є одержати граничний розподіл для $\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha)$ при довільному $\alpha \in \mathbb{R}$. Виявляється, що відповідний результат є нескладним наслідком попереднього.

1 Зсув вздовж координатної осі

Нам будуть потрібні кілька допоміжних тверджень. Розглянемо розв'язок $\xi(t)$ рівняння (1) з початковою умовою $\xi(0) = x$, $x \in \mathbb{R}$ та випадковий процес $\eta(t) = \xi(t) - \alpha$, $t \geq 0$.

Лема 1. *Для процесу $\eta(t)$ має місце наступне:*

1.A $d\eta(t) = \hat{a}(\eta(t))dt + \sqrt{\hat{b}(\eta(t))}dw(t)$, $\eta(0) = x - \alpha$, *де* $\hat{a}(x) = a(x+\alpha)$, $\hat{b}(x) = b(x+\alpha)$;

1.B $\eta(t)$ *є дифузійним процесом із щільністю ймовірності переходу*

$$\hat{g}(t,x,y) = g(t, x+\alpha, y+\alpha).$$

Доведення. Твердження A випливає з рівності

$$d\eta(t) = d\xi(t) = a(\xi(t))dt + \sqrt{b(\xi(t))}dw(t) = a(\eta(t)+\alpha)dt + \sqrt{b(\eta(t)+\alpha)}dw(t) = \\ = \hat{a}(\eta(t))dt + \sqrt{\hat{b}(\eta(t))}dw(t).$$

А оскільки для довільної борельової множини $\Gamma \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}_x(\eta(t) \in \Gamma) = \mathbb{P}_{x+\alpha}(\xi(t) \in \Gamma + \alpha) = \int\limits_{\Gamma+\alpha} g(t, x+\alpha, y)dy = \\ \int\limits_{\Gamma} g(t, x+\alpha, y+\alpha)dy,$$

то правильним є і твердження B. □

Нехай $\hat{A}(x)$, $\hat{F}(x)$, $\hat{H}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ — функції, що побудовані з допомогою формул (3) за функціями $\hat{a}(\cdot)$ і $\hat{b}(\cdot)$. Рівність

$$\hat{A}(x) = \int\limits_0^x \frac{\hat{a}(z)}{\hat{b}(z)}\,dz = \int\limits_0^x \frac{a(z+\alpha)}{b(z+\alpha)}\,dz = \int\limits_\alpha^{x+\alpha} \frac{a(z)}{b(z)}\,dz = A(x+\alpha) - A(\alpha)$$

дає змогу стверджувати, що функції $\hat{A}(\cdot)$ і $A(\cdot)$ обмежені одночасно. Легко одержати і наступні рівності:

$$\hat{F}(x) = (F(x+\alpha) - F(\alpha))e^{2A(\alpha)}, \quad \hat{H}(x) = (H(x+\alpha) - H(\alpha))e^{-2A(\alpha)} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Обчислимо границі

$$\hat{\varkappa}_F = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x}\hat{F}(x) = e^{2A(\alpha)} \lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x}(F(x+\alpha) - F(\alpha)) = \varkappa_F e^{2A(\alpha)}, \tag{6}$$

$$\hat{\varkappa}_H = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x}\hat{H}(x) = e^{-2A(\alpha)} \lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x}(H(x+\alpha) - H(\alpha)) = \varkappa_H e^{-2A(\alpha)}. \tag{7}$$

Звідси, між іншим, випливає, що

$$\hat{\varkappa}_F \hat{\varkappa}_H = \varkappa_F \varkappa_H. \tag{8}$$

Побудувавши послідовність $\{(\eta_n(t))_{t\ge 0} : n \ge 1\}$ дифузійних процесів з коефіцієнтами $\hat{a}_n(x) = n\hat{a}(nx)$ та $\hat{b}_n(x) = \hat{b}(nx)$ і початковими значеннями $\eta_n(0) = x - \alpha$, можемо стверджувати про правильність наступного.

Лема 2. 2.A *Граничні розподіли (в розумінні слабкої збіжності) послідовностей* $\{(\eta_n(t))_{t\ge0} : n \ge 1\}$ *та* $\{(\xi_n(t))_{t\ge0} : n \ge 1\}$ *однакові.*

2.B $\nu_N^{(n,m)}(\alpha) = \hat{\nu}_N^{(n,m)}(0)$, *де* $\hat{\nu}_N^{(n,m)}(0)$ — *кількість перетинів послідовністю випадкових величин* $\eta_n(0)$, $\eta_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $\eta_n\left(\frac{N}{m}\right)$ *нульового рівня.*

Перейдемо тепер до основного твердження.

Теорема. *Нехай функції* $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ *і* $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$ — *неперервні, обмежені та гельдерові, функція* [1] $(A(x))_{x\in\mathbb{R}}$ *обмежена та існують границі* $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}F(x) = \varkappa_F$, $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}H(x) = \varkappa_H$. *Тоді якщо* $n\to+\infty$, $m\to+\infty$ *в такий спосіб, що* $\frac{n^2}{m}\to\tau$, $0<\tau<+\infty$, *то*

$$\lim \mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha) < y\right) = \mathbb{I}_{(0;+\infty)}(y)2\Phi\left(\frac{y}{\gamma(\alpha)\sqrt{t}} + \frac{|x-\alpha|}{\sqrt{t}}\sqrt{\varkappa_F\varkappa_H}\right),$$

де

$$\gamma(\alpha) = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\alpha} H'(y)dy\int\limits_{\alpha}^{\infty} g(\tau,y,z)dz + \int\limits_{\alpha}^{\infty} H'(y)dy\int\limits_{-\infty}^{\alpha} g(\tau,y,z)dz\right).$$

Доведення. Твердження леми 2 та рівності (8) і

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha) < y\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha) < y/\xi(0)=x\right) = \\ &\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\hat{\nu}_{[mt]}^{(n,m)}(0) < y/\eta(0)=x-\alpha\right) = \mathbb{P}_{x-\alpha}\left(\frac{1}{n}\hat{\nu}_{[mt]}^{(n,m)}(0) < y\right)\end{aligned}$$

дають змогу стверджувати, що для доведення теореми досить обчислити

$$\gamma(\alpha) = \hat{\gamma} = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\hat{\varkappa}_F}{\hat{\varkappa}_H}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\hat{H}'(y)dy\int\limits_{0}^{\infty}\hat{g}(\tau,y,z)dz + \int\limits_{0}^{\infty}\hat{H}'(y)dy\int\limits_{-\infty}^{0}\hat{g}(\tau,y,z)dz\right).$$

З леми 1 та рівностей (5) — (7) випливає, що

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha) = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F e^{2A(\alpha)}}{\varkappa_H e^{-2A(\alpha)}}}\Bigg(&e^{-2A(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{0} H'(y+\alpha)dy\int\limits_{0}^{\infty} g(\tau,y+\alpha,z+\alpha)dz + \\ &e^{-2A(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty} H'(y+\alpha)dy\int\limits_{-\infty}^{0} g(\tau,y+\alpha,z+\alpha)dz\Bigg) = \\ \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\alpha} H'(y)dy\int\limits_{\alpha}^{\infty} g(\tau,y,z)dz + \int\limits_{\alpha}^{\infty} H'(y)dy\int\limits_{-\infty}^{\alpha} g(\tau,y,z)dz\right).&\end{aligned}$$

Отже, теорема доведена. □

---

[1] Функції $A(x)$, $F(x)$, $H(x)$ задаються рівностями (3)

2 Випадок періодичних дифузійних коефіцієнтів

Розглянемо випадок, коли функції $a(\cdot)$ і $b(\cdot)$ періодичні з найменшим додатним періодом l та задовольняють умови теореми попереднього пункту. Легко бачити, що для розв'язку $(\xi_x(t))_{t\geq 0}$ рівняння

$$\xi_x(t) = x + \int\limits_0^t a(\xi_x(s))ds + \int\limits_0^t \sqrt{b(\xi_x(s)}dw(s)$$

процес $\xi_{x+l}(t) - l$ також задовольняє це ж рівняння, тобто $\xi_{x+l}(t) - l = \xi_x(t)$ через єдиність його розв'язку. Тому $g(t, x+l, y+l) = g(t, x, y)$ при всіх $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Враховуючи очевидну рівність $\int\limits_x^{x+l} f(z)dz = \int\limits_0^l f(z)dz$ для l-періодичної функції f, одержимо

$$H'(x+l) = \frac{1}{b(x+l)} \exp\left\{2\int\limits_0^{x+l} \frac{a(z)}{b(z)}dz\right\} = H'(x)e^{2A(l)}.$$

Очевидно, що $A(kl) = \int\limits_0^{kl} \frac{a(z)}{b(z)}\, dz = \sum\limits_{m=0}^{k-1} \int\limits_{ml}^{(m+1)l} \frac{a(z)}{b(z)}\, dz = \sum\limits_{m=0}^{k-1} \int\limits_0^l \frac{a(z)}{b(z)}\, dz = kA(l)$, тому, при умові обмеженості функції $A(\cdot)$, необхідно, щоб $A(l) = 0$. Отже, $H'(x+l) = H'(x)$ при всіх $x \in \mathbb{R}$. Таким чином,

$$\gamma(\alpha+l) = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\alpha+l} H'(y)dy \int\limits_{\alpha+l}^{\infty} g(\tau,y,z)dz + \int\limits_{\alpha+l}^{\infty} H'(y)dy \int\limits_{-\infty}^{\alpha+l} g(\tau,y,z)dz\right) =$$

$$\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\alpha} H'(y+l)dy \int\limits_{\alpha}^{\infty} g(\tau,y+l,z+l)dz + \int\limits_{\alpha}^{\infty} H'(y+l)dy \int\limits_{-\infty}^{\alpha} g(\tau,y+l,z+l)dz\right) =$$

$$\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\varkappa_F}{\varkappa_H}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\alpha} H'(y)dy \int\limits_{\alpha}^{\infty} g(\tau,y,z)dz + \int\limits_{\alpha}^{\infty} H'(y)dy \int\limits_{-\infty}^{\alpha} g(\tau,y,z)dz\right) = \gamma(\alpha).$$

Отже, для кожного цілого k

$$\lim \mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha+kl) < y\right) = \mathbb{I}_{(0;+\infty)}(y)2\Phi\left(\frac{y}{\gamma(\alpha)\sqrt{t}} + \frac{|x-\alpha-kl|}{\sqrt{t}}\sqrt{\varkappa_F\varkappa_H}\right). \tag{9}$$

Звідси

$$\lim \mathbb{P}_{x+kl}\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha+kl) < y\right) = \mathbb{I}_{(0;+\infty)}(y)2\Phi\left(\frac{y}{\gamma(\alpha)\sqrt{t}} + \frac{|x-\alpha|}{\sqrt{t}}\sqrt{\varkappa_F\varkappa_H}\right) = \lim \mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha) < y\right).$$

Подавши рівень перетину у вигляді $\alpha = kl + \beta$, де $k = \left[\frac{\alpha}{l}\right]$, $\beta = \left\{\frac{\alpha}{l}\right\}l$, одержимо

$$\lim \mathbb{P}_x\left(\frac{1}{n}\nu_{[mt]}^{(n,m)}(\alpha) < y\right) = \mathbb{I}_{(0;+\infty)}(y)2\Phi\left(\frac{y}{\gamma(\beta)\sqrt{t}} + \frac{|x-\alpha|}{\sqrt{t}}\sqrt{\varkappa_F\varkappa_H}\right).$$

Література

1. Кулинич Г.Л. *Асимптотическая нормальность распределения решения стохастического диффузионного уравнения* // Украинский матем. журн. – 1968. – Т.20, №3. – С. 396-400.

2. Кулинич Г.Л. *Предельное распределение решения стохастического диффузионного уравнения* // Теория вероятн. и ее примен. – 1968. – XIII, 3. – С. 502-506.

3. Хайсам Аль Фарах, Микола Портенко. Гранична теорема для кількості перетинів фіксованого рівня слабко збіжною послідовністю дифузійних процесів / — Київ, 2007. — 24 с. — (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2007.6)

4. Kulik A.M. *A limit theorem for the number of sign changes for a sequence of one-dimensional diffusions*, Theory of Stochastic Processes, **14**, 30 (2008), 2. 79-92.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 19.11.2009

Osypchuk M.M. *On the number of crossings of some levels by a sequence of diffusion processes*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 191–196.

The limit behavior of the number of crossings of some sequence of levels by the following sequence of random variables $\xi_n(0)$, $\xi_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $\xi_n\left(\frac{N}{m}\right)$, as the integers n, m, N are increasing to infinity in some consistent way, is investigated, where $(\xi_n(t))_{t\geq 0}$ for $n = 1, 2, \ldots$ is a diffusion process on a real line $\mathbb{R}$ with its local characteristics (that is, drift and diffusion coefficients) $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ and $(b_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ given by $a_n(x) = na(nx)$, $b_n(x) = b(nx)$ for $x \in \mathbb{R}$ and $n = 1, 2, \ldots$ with some fixed functions $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ and $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$.

Осипчук М.М. *О предельном распределении количества пересечений последовательности уровней некоторой последовательностью диффузионных процессов* // *Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 191–196.

В работе рассматривается предельное распределение количества пересечений некоторого уровня последовательностью случайных величин $\xi_n(0)$, $\xi_n\left(\frac{1}{m}\right)$,..., $\xi_n\left(\frac{N}{m}\right)$ при стремлении к бесконечности натуральных n, m, N некоторым согласованным способом. Здесь $(\xi_n(t))_{t\geq 0}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — диффузионный процесс на действительной прямой $\mathbb{R}$ с локальными характеристиками (переносом и коеффициентом диффузии) $(a_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ и $(b_n(x))_{x\in\mathbb{R}}$ задающимися равенствами $a_n(x) = na(nx)$, $b_n(x) = b(nx)$ для $x \in \mathbb{R}$ и $n = 1, 2, \ldots$ при некоторых фиксированных функциях $(a(x))_{x\in\mathbb{R}}$ и $(b(x))_{x\in\mathbb{R}}$.