Карпатські математичні публікації. Т.1, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.2

УДК 517.948:517.946

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А.

ДВОСТОРОННЯ АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Двостороння апроксимація розв'язків диференціальних рівнянь // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 172–179.

Досліджено двосторонні ітераційні алгоритми, які є аналогами методу Чаплигіна для звичайних диференціальних рівнянь. Встановлено умови, при виконанні яких вони можуть мати квадратичну збіжність навіть у випадку недиференційовності оператора.

Реалізація наближених методів розв'язання нелінійних задач та лінійних задач високої розмірності на практиці здебільшого не обходиться без потреби ітераційного уточнення шуканого наближеного розв'язку. Це викликає зацікавленість до теорії відомих та побудови і дослідження нових ітераційних методів, отримуваних, зокрема, поєднанням різних способів наближеного розв'язання операторних рівнянь. При цьому часто значно розширюються можливості їх ефективного застосування як у класичних (див., напр. [1] – [5]), так і у новітніх (див., напр. [6, 9]) дослідженнях. З цього погляду актуальною є потреба розширити можливості двосторонніх методів, які характеризуються такими властивостями, як можливістю двостороннього апостеріорного оцінювання шуканого розв'язку на кожному кроці ітераційного процесу, оцінювання якісного характеру поведінки цього розв'язку, монотонністю ітерацій і, у багатьох випадках, їх надлінійною швидкістю збіжності. Цим обумовлена актуальність пропонованого дослідження, яке доповнює і уточнює деякі результати із [2, 8] , а також із [7] .

Будемо шукати в класі неперервно диференційовних на $[t_0, t_1]$ функцій розв'язок задачі Коші

$$x'(t) = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

де $f(t,x)$ – дійсна неперервна функція при $t \in [t_0, t_1]$, $x \in S(x_0) = \{x||x - x_0| \leqslant M, \quad x, x_0 \in R\}$, R – множина дійсних чисел. Припустимо виконання наступних умов.

2000 *Mathematics Subject Classification:* ?.

Ключові слова і фрази: недиференційовні оператори, неперервно-диференційовні функції, двосторонні оцінки.

Умова H_1. *Існують такі неперервні за сукупністю аргументів при* $t \in [t_0, t_1]$, $x \in S(x_0)$, *неспадні щодо* x *функції* $a_1(t,x)$, $\alpha_1(t,x)$, *причому* $\alpha_1(t,x)$ *є невід'ємною, що із співвідношень* $t \in [t_0, t_1]$, $y \leqslant z$, $y, z \in S(x_0)$, *випливає нерівність*

$$[a_1(t,y) + \alpha_1(t,y)](z-y) \leqslant f(t,z) - f(t,y).$$

Умова H_2. *Існують неперервно диференційовні при* $t \in [t_0, t_1]$ *функції* $u(t), v(t) \in S$, *для яких*

$$u(t_0) = v(t_0) = x_0, \quad u(t) \leqslant v(t) \quad (t \in [t_0, t_1]) \tag{2}$$

$$u'(t) \leqslant f(t, u(t)), \quad v'(t) \geqslant f(t, v(t)) \quad (t \in [t_0, t_1]). \tag{2'}$$

Розглянемо ітераційний процес

$$y_0(t) = u(t), \quad z_0(t) = v(t),$$

$$y'_{n+1}(t) = a_1(t, y_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t) + f(t, y_n(t)),$$

$$z'_{n+1}(t) = [a_1(t, y_n(t)) + \alpha_1(t, y_n(t))](z_{n+1}(t) - z_n(t) + f(t, z_n(t)), \tag{3}$$

$$y_{n+1}(t_0) = z_{n+1}(t_0) = x_0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3'}$$

Позначимо $S_0 = [u, v] = \{x | u \leqslant x \leqslant v, u, v, x \in S(x_0)\}$.

Теорема 1. *Якщо справджуються умови* H_1 *та* H_2, *то для послідовностей* $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *побудованих за формулами (3), мають місце нерівності*

$$y_k(t) \leqslant y_{k+1}(t) \leqslant z_{k+1}(t) \leqslant z_k(t) \quad (t \in [t_0, t_1], k = 0, 1, \ldots). \tag{4}$$

Доведення. Співвідношення (4) для $k = 0$ випливають з (2), (3). Припускаючи, що вони мають місце лише для $k = n - 1$, матимемо

$$y'_{n+1}(t) - y'_n(t) = f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t)) + a_1(t, y_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) -$$
$$a_1(t, y_{n-1}(t))(y_n(t) - y_{n-1}(t)) \geqslant a_1(t, y_{n-1}(t))(y_n(t) - y_{n-1}(t)) +$$
$$\alpha_1(t, y_{n-1}(t))(y_n(t) - y_{n-1}(t)) + a_1(t, y_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) -$$
$$a_1(t, y_{n-1}(t))(y_n(t) - y_{n-1}(t)) \geqslant a_1(t, y_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)),$$

$$z'_n(t) - z'_{n+1}(t) = f(t, z_{n-1}(t)) - f(t, z_n(t)) + a_1(t, y_{n-1}(t))(z_n(t) - z_{n-1}(t)) -$$
$$a_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) + \alpha_1(t, y_{n-1}(t))(z_n(t) - z_{n-1}(t)) - \alpha_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) \geqslant$$
$$a_1(t, z_n(t))(z_{n-1}(t) - z_n(t)) - \alpha_1(t, y_{n-1}(t))(z_{n-1}(t) - z_n(t)) - a_1(t, y_{n-1}(t))(z_{n-1}(t) - z_n(t)) +$$
$$a_1(t, y_n(t))(z_n(t) - z_{n+1}(t)) + \alpha_1(t, y_n(t))(z_n(t) - z_{n+1}(t)) + \alpha_1(t, z_n(t))(z_{n-1}(t) - z_n(t)) =$$
$$[a_1(t, y_n(t)) + \alpha_1(t, y_n(t))](z_n(t) - z_{n+1}(t)) + [a_1(t, z_n(t)) - a_1(t, y_{n-1}(t))](z_{n-1}(t) - z_n(t)) +$$
$$[\alpha_1(t, y_n(t)) - \alpha_1(t, y_{n-1}(t))](z_{n-1}(t) - z_n(t)) \geqslant [a_1(t, y_n(t)) + \alpha_1(t, y_n(t))](z_n(t) - z_{n+1}(t)),$$

$$z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) = a_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) - a_1(t, y_n(t))(z_n(t) - y_n(t)) +$$
$$\alpha_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) + f(t, z_n(t)) - f(t, y_n(t)) \geqslant a_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) -$$
$$a_1(t, y_n(t))(z_n(t) - y_n(t)) - \alpha_1(t, y_n(t))(z_n(t) - z_{n+1}(t)) + a_1(t, y_n(t))(z_n(t) - y_n(t)) +$$
$$\alpha_1(t, y_n(t))(z_n(t) - y_n(t)) = a_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + \alpha_1(t, y_n(t))(z_{n+1}(t) - y_n(t)) \geqslant$$
$$(a_1(t, y_n(t)) + \alpha_1(t, y_n(t)))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + \alpha_1(t, y_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) =$$
$$(a_1(t, y_n(t)) + \alpha_1(t, y_n(t)))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)).$$

Отримані співвідношення разом з теоремою про диференціальні нерівності [2][с. 199] означають, що нерівності (4) виконуються. □

Дослідимо збіжність ітераційного процесу (3). З неперервності правої частини рівняння (1) випливає існування принаймні одного неперервно диференційовного на $[t_0, t_2)$ розв'язку $x(t)$ задачі (1). З іншого боку, із співвідношень (4) робимо висновок про існування неперервних границь $y(t)$ та $z(t)$ компактних послідовностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$. Можна переконатися, що послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ – рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні, і тому можна посилатися на лему Арчела. Функції $y(t)$ та $z(t)$ є неперервно диференційовними і кожна з них є розв'язком задачі (1). Якщо задача (1) має єдиний неперервно диференційовний на $[t_0, t_1]$ розв'язок $x(t)$, то $x(t) = y(t) = z(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$. Отже, має місце таке твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і задача (1) має єдиний неперервно диференційовний розв'язок $x(t)$. Тоді послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, побудовані за формулами (3), збігаються рівномірно і монотонно відповідно знизу і зверху до цього розв'язку, тобто*

$$y_n(t) \leqslant y_{n+1}(t) \leqslant x(t) \leqslant z_n(t) \leqslant z_{n+1}. \tag{5}$$

Умова H_3. *Існує така неперервна за сукупністю аргументів невід'ємна функція $b_1(t, y, z)$, що з нерівності $y \leqslant z$, $y, z \in S(x_0)$ випливає*

$$f(t, z) - f(t, y) \leqslant (a_1(t, y) - b_1(t, y, z))(z - y) \quad (t \in [t_0, t_1]). \tag{6}$$

Теорема 3. *Якщо справджуються умови $H_1 - H_3$, то мають місце оцінки*

$$z'_{n+1} - y'_{n+1} \leqslant a_1(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) + b_1(t, y, z)(z_n - y_n), \tag{7}$$

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant \int_{t_0}^{t} b_1(s, y_n, z_n) \exp\left(\int_s^t a_1(\xi, y_n) d\xi\right)(z_n - y_n)\, ds. \tag{8}$$

Доведення. Використовуючи умову H_3 та нерівності (3), знаходимо

$$z'_{n+1} - y'_{n+1} = a_1(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) - a_1(t, y_n)(z_n - y_n) - \alpha_1(t, y_n)(z_n - z_{n+1}) +$$
$$f(t, z_n) - f(t, y_n) \leqslant a_1(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) - a_1(t, y_n)(z_n - y_n) -$$
$$\alpha_1(t, y_n)(z_n - z_{n+1}) + a_1(t, y_n)(z_n - y_n) + b_1(t, y_n, z_n)(z_n - y_n) \leqslant$$

$$a_1(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) + b_1(t, y_n, z_n)(z_n - y_n).$$

Для обгрунтування оцінки (8) скористаємося задачею

$$w'_{n+1} = a_1(t, y_n)w_{n+1} + b_1(t, y_n, z_n)w_n, \quad w_{n+1}(t_0) = 0. \tag{9}$$

З теоремою [2] про диференціальні нерівності та умови (9) випливає нерівність

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant w_{n+1}.$$

Тому, виписавши у явному вигляді розв'язок задачі (9), отримуємо оцінку (8). □

Оцінки (7), (8) можна уточнити, якщо конкретизувати вибір функції $b_1(t, y, z)$. Зокрема, поклавши, що $b_1(t, y, z) \leqslant h(t, y, z)(z - y)^\gamma$, де $\gamma > 0$, $h(t, y, z) \leqslant h_0$, з нерівностей (7), (8) при

$$\exp\left[\int_s^t |a_1(\xi, y_n(\xi))| d\xi\right] \leqslant a_0$$

одержимо

$$z'_{n+1} - y'_{n+1} \leqslant a_1(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) + h(t, y_n, z_n)(z_n - y_n)^{1+\gamma}, \tag{10}$$

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant \int_{t_0}^{t_1} h_1(s, y_n, z_n) \exp\left[\int_s^t a_1(\xi, y_n(\xi)) d\xi\right] (z_n(s) - y_n(s))^{1+\gamma} ds, \tag{11}$$

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant h_0 a_0 \int_{t_0}^{t_1} (z_n(s) - y_n(s))^{1+\gamma} ds, \tag{12}$$

де $t, s \in [t_0, t_1]$, $y \in [u, v]$, $[u, v] = \{y(t) | u(t) \leqslant y(t) \leqslant v(t)\}$.

Якщо $|a_1(t, y)| \leqslant g_1$ при $t \in [t_0, t_1]$, $y \in [u, v]$, то із (11) одержуємо

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant h_0 \int_{t_0}^{t_1} e^{g_1(t-s)} (z_n(s) - y_n(s))^{1+\gamma} ds. \tag{13}$$

Апостеріорні оцінки (7), (8), (10)–(13) можна використати для отримання апріорних оцінок. Зокрема, з (12) випливає, що

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant (h_0 a_0)^{\frac{(1+\gamma)^{n+1} - 1}{\gamma}} \left[\max_t (v(t) - u(t))\right]^{(1+\gamma)^{n+1}} (t_1 - t_0) \tag{14}$$

для $\gamma > 0$. При $\gamma = 1$ матимемо характерну для методу Чаплигіна оцінку

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leqslant (h_0 a_0)^{2^{n+1} - 1} \left[\max_t (v(t) - u(t))\right]^{(1+\gamma)^{n+1}} (t_1 - t_0).$$

У випадку, коли існує похідна $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$, можна прийняти

$$a_1(t, y_n) - \alpha_1(t, y_n) = \frac{\partial f(t, y_n)}{\partial x},$$

а також

$$a_1(t, y) = \frac{\partial f(t, y_n)}{\partial x}. \tag{15}$$

Якщо при цьому $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ задовольняє умову Ліпшиця щодо x,

$$\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,z)}{\partial x}\right| \leqslant l|y-z|,$$

то оцінка (14) співпадає з відомою оцінкою збіжності методу Чаплигіна.

Зауважимо, що у формулах (3) можна було б взяти $\alpha_1(t,y) \equiv 0$. Отриманий при цьому алгоритм має вигляд

$$\begin{gathered} y'_{n+1} = a_1(t,y_n)(y_{n+1}-y_n) + f(t,y_n), \\ z'_{n+1} = a_1(t,y_n)(z_{n+1}-z_n) + f(t,z_n), \\ y_0 = u, \quad z_0 = v, \\ y_{n+1}(t_0) z_{n+1}(t_0) = x_0, \end{gathered} \tag{16}$$

який при виборі $a_1(t,y)$ за формулою (15) перетворюється в один з різновидів методів чаплигінського типу. На перший погляд видається слушним вважати (16) різновидом монотонного методу Ньютона. Однак у такому випадку основний варіант методу Ньютона мав би виглядати так

$$\begin{aligned} y'_{n+1} &= a_1(t,y_n)(y_{n+1}-y_n) + f(t,y_n), \\ z'_{n+1} &= a_1(t,z_n)(z_{n+1}-z_n) + f(t,z_n) \quad (n = 0,1,\ldots). \end{aligned} \tag{17}$$

Система (17) отримана із системи (16) заміною у другому з рівнянь функції $a_1(t,y_n)$ функцією $a_1(t,z_n)$. Це призводить до того, що ітераційному процесові (17) невластива двосторонність ні за якого вибору початкового наближення $y_0(t)$, $z_0(t)$. Для алгоритму (16) придатна схема дослідження, яка використана для алгоритму (3). Зауважимо, що заміна обидвох рівнянь системи (16) рівняннями

$$\begin{aligned} y'_{n+1} &= a_1(t,z_n)(y_{n+1}-y_n) + f(t,y_n), \\ z'_{n+1} &= a_1(t,z_n)(z_{n+1}-z_n) + f(t,z_n) \end{aligned} \tag{18}$$

призводить до того, що алгоритм (18), ($3'$) має властивість двосторонності за дещо інших припущень щодо функції $a_1(t,x)$.

Теорема 4. *Якщо в умові H_1 замість неспадання $a_1(t,x)$ щодо x вимагати її незростання та зберегти всі інші умови теорем 1 та 2, то для ітераційного процесу, побудованого за допомогою формул*

$$\begin{gathered} y'_{n+1} = a_1(t,z_n)(y_{n+1}-y_n) + f(t,y_n), \quad y_0 = u, \\ z'_{n+1} = a_1(t,z_n)(z_{n+1}-z_n) + f(t,z_n), \quad z_0 = v, \\ y_{n+1}(t_0) = z_{n+1}(t_0) = x_0, \end{gathered} \tag{19}$$

можна обгрунтувати такі самі висновки, як ті, що містять теореми 1 та 2.

Доведення лише незначними деталями відрізняється від доведення теорем 1 та 2. □

Розглянемо інший двосторонній ітераційний процес, який також можна вважати одним із варіантів методів чаплигінського типу. Для його побудови використаємо такі аналоги умов H_1 та H_2.

Умова H_4. *Задані неперервні при* $t \in [t_0, t_1]$, *невід'ємні неспадні щодо* x *функції* $a_2(t,x)$, $\alpha_2(t,x)$, *для яких із співвідношень* $t \in [t_0, t_1]$, $y \leqslant z$, $y, z \in S(x_0)$, *випливає нерівність*

$$f(t,z) - f(t,y) \leqslant -[a_2(t,y) + \alpha_2(t,y)](z-y). \tag{20}$$

Умова H_5. *Існують неперервно диференційовні при* $t \in [t_0, t_1]$ *функції* $u(t)$, $v(t)$, *для яких виконується співвідношення* $(2')$ *та*

$$u'(t) \leqslant f(t, v(t)), \quad v'(t) \geqslant f(t, u(t)) \quad (t \in [t_0, t_1]).$$

Побудуємо послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, означуючи на кожному кроці ітераційного процесу $(y_{n+1}(t), z_{n+1}(t))$ як розв'язок системи рівнянь

$$y'_{n+1} = -a_2(t, y_n)(z_{n+1} - z_n) + f(t, z_n),$$

$$z'_{n+1} = -(a_2(t,y_n) + \alpha_2(t,y_n))(y_{n+1} - y_n) + f(t, y_n) \tag{21}$$

з початковою умовою $(3')$.

Теорема 5. *Якщо справджуються умови* H_4 *та* H_5, *то для ітераційного процесу (21),* $(3')$ *мають місце співвідношення (4).*

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, застосовуєм метод математичної індукції. При $k = 0$ співвідношення (4) очевидні.З припущення, що вони мають місце при $k = n-1$, одержуємо

$$y'_{n+1} - y'_n = -a_2(t,y_n)(z_{n+1} - z_n) + f(t,z_n) + a_2(t, y_{n-1})(z_n - z_{n-1}) - f(t, z_{n-1}) \geqslant$$

$$-a_2(t,y_n)(z_{n+1} - z_n) + a_2(t,y_{n-1})(z_n - z_{n-1}) + a_2(t,z_n)(z_{n-1} - z_n) +$$

$$\alpha_2(t,z_n)(z_{n-1} - z_n) \geqslant a_2(t,y_n)(z_n - z_{n+1}) + [a_2(t,z_n) - a_2(t,y_{n-1})](z_{n-1} - z_n) \geqslant$$

$$a_2(t,y_n)(z_n - z_{n+1}),$$

$$z'_{n+1} - z'_n = -a_2(t, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) - \alpha_2(t, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) +$$

$$[a_2(t,y_n) + \alpha_2(t,y_n))](y_{n+1} - y_n) + f(t, y_{n-1}) - f(t, y_n) \geqslant$$

$$-a_2(t,y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) - a_2(t,y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) + [a_2(t,y_n) + \beta_2(t,y_n)] \times$$

$$(y_{n+1} - y_n) + a_2(t,y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) + \alpha_2(t,y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) =$$

$$[a_2(t, y_n + \alpha_2(t,y_n)](y_{n+1} - y_n).$$

Застосовуючи теорему про системи диференціальних нерівностей та умову $(3')$, із співвідношень

$$y'_{n+1} - y'_n \geqslant a_2(t,y_n)(z_n - z_{n+1}),$$

$$z'_{n+1} - z'_n \geqslant [a_2(t, y_n + \alpha_2(t, y_n)](y_{n+1} - y_n)$$

отримуємо, що

$$y_n(t) \leqslant y_{n+1}(t), z_{n+1}(t) \leqslant z_n(t) \quad (t \in [t_0, t_1]). \tag{22}$$

Переконаємося, що

$$y_{n+1}(t) \leqslant z_{n+1}(t) \quad (t \in [t_0, t_1]). \tag{23}$$

З (21) та умови H_4 отримуємо

$$z'_{n+1} - y'_{n+1} = a_2(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) - a_2(t, y_n)(z_n - y_n) + \alpha_2(t, y_n)(y_{n+1} - y_n)+$$

$$f(t, y_n) - f(t, z_n) \geqslant a_2(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) + \alpha_2(t, y_n)(y_{n+1} - y_n) + a_2(t, y_n)(z_n - y_n)+$$

$$\alpha_2(t, y_n)(z_n - y_n) \geqslant a_2(t, y_n)(z_{n+1} - y_{n+1}).$$

Використовуючи теорему 5 про диференціальні нерівності, приходимо до співвідношень (23). Поєднанням нерівностей (22), (23) завершуємо доведення теореми. □

Теорема 6. *Нехай виконані умови H_4 та H_5 і задача (1) має неперервно диференційовний на $[t_0, t_1]$ розв'язок $x(t)$, а задача*

$$y'(t) = f(t, z(t)), \quad z'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = z(t_0) = x_0 \tag{24}$$

може мати не більше як один розв'язок $(y(t), z(t))$ з неперервно диференційовними на $[t_0, t_1]$ компонентами $y(t)$, $z(t)$. Тоді для єдиного неперервно диференційовного на $[t_0, t_1]$ розв'язку $x(t)$ задачі (1) матимемо оцінки (5).

Доведення. Монотонність та рівномірна збіжність ітераційного процесу (21), (3′) на $[t_0, t_1]$ до $y(t)$, $z(t)$ ґрунтується на схожих з використаними для доведення теореми 2 міркуваннях для алгоритму (3), (3′). Очевидно, що пара функцій $(y(t), z(t))$ є розв'язком задачі (24). З існування розв'язку $x(t)$ задачі (1) і структури системи диференціальних рівнянь в задачі (24) випливає, що $(x(t), x(t))$ також є розв'язком цієї задачі. Задача (24) має єдиний розв'язок, тому $y(t) = z(t) = x(t)$ $(t \in [t_0, t_1])$. Звідси робимо висновок, що співвідношення (5) справджується. □

Теорема 6, як і теорема 2, не дає засобів для оцінки швидкості збіжності ітераційного процесу.

Література

1. Курпель Н.С. Просиционно-итеративные методы решения систем уравнений. – К: Наукова думка, 1968. – 243 с.
2. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применение. – Киев: Наукова думка, 1980. – 267 с.
3. Лучка А.Ю. Просиционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – К: Наукова думка, 1980. – 264 с.
4. Марчук Г.И., Агошков В.И. ВВедение в просиционно-сеточные методы. – М: Наука, 1981. – 416 с.
5. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в истории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К: Наукова думка, 1992. – 277 с.

6. Чуйко С.М. *Ускорение итерационной процедуры для критической краевой задачи методом Ньютона-Канторовича*// Дванадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка Кравчука. Матеріали конференції. – Київ, 2008. – 436.
7. Шувар Б.А. *Двусторонние итерационные методы решения нелинийных уравнений в полуупорядоченных пространствах*// Второй симпозиум по методам решения нелинийных уравнений и задач оптимизации. – Таллин: Институт кибернетики АН ЭССР, 1981. – С.68-73.
8. Шувар Б.А., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двосторонні наближені методи. – Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ Центру інформаційних технологій Прикарпатського національного університету імені Василя стефаника, 2007.– 515 с.
9. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Utrecht, Boston, VSP, 2004, 317 p.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 17.11.2009

Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. *Both-side approximation of solutions of differential equations.*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 2 (2009), 172–179.

Both-side algorithms analogs of the Chaplygin method for ordinary differential equations. Conditions of algorithms squared convergence even in the case of operator nondifferentiability have been established.

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Двусторонняя аппроксимация решений дифференциальных уравнений // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №2. — С. 172–179.

Исследовано двусторонние итерационные алгоритмы, которые являются аналогами методу Чаплигина для обыкновенных дифференциальных уравнений. Установлены условия, при выполнении которых эти методы могут иметь квадратичную сходимость даже в случае недиференцируемости оператора.