Карпатські математичні публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.1, No.1

УДК 517.76

Я.З.Стасюк, О.Б.Скасків

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ СУМИ І МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Я.З.Стасюк, О.Б.Скасків *Про еквівалентність суми і максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 100–106.

Для абсолютно збіжних у півплощині $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ рядів Діріхле $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, де $0 \le \lambda_n \uparrow +\infty$ $(0 \le n \uparrow +\infty)$, встановлено умови на коефіцієнти його мажоранти Ньютона, за яких співвідношення $F(x+iy) = (1+o(1))a_{\nu(x)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}}$ виконується при $x \to -0$ зовні деякої множини E нульової логарифмічної щільності у точці 0, рівномірно по $y \in \mathbb{R}$.

Вступ

Нехай S_0 — клас функцій F, зображуваних абсолютно збіжними у півплощині $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ рядами Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

де послідовність $\lambda = \{\lambda_j\colon j \ge 0\} \subset \mathbb{R}_+$ попарно різних чисел задовольняє умову

$$\sup\{\lambda_n\colon n \ge 0\} = +\infty. \tag{2}$$

Нехай $S_0(a)$ — клас усіх рядів Діріхле $F \in S_0$ вигляду (1) з фіксованою послідовністю $a = \{|a_n|\colon n \ge 0\}$.

Через S позначимо клас усіх цілих рядів Діріхле з невід'ємними показниками.

У статті [1] доведено, що за умови

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu_{n+1} - \mu_n} < +\infty, \tag{3}$$

де $\mu_n \stackrel{\text{def}}{=} \ln |a_n|$, для кожної функції $F \in S_0(a)$ співвідношення

$$F(x+iy) = (1 + o(1))a_{\nu(x)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}} \tag{4}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B50.

виконується при $x \to -0$ зовні деякої множини E скінченної логарифмічної міри, тобто

$$\ln\text{-meas}\, E \overset{\text{def}}{=} \int_{E\cap[-1,0)} d\ln\left(-\frac{1}{x}\right) < +\infty,$$

рівномірно по $y \in \mathbb{R}$. Тут $\nu(x) = \nu(x, F) = \max\{n\colon |a_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x, F)\}$ — центральний індекс ряду (1), а $\mu(x, F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n}\colon n \ge 0\}$ — його максимальний член.

У статті [2] доведено, що скінченність логарифмічної міри виняткової множини E у співвідношенні (4) за умови (3) є непокращуваним описом.

В [1], крім цього, встановлено, що умова (3) є і необхідною для того, щоб співвідношення (4) виконувалось для кожної функції $F \in S_0(a)$ при $x \to -0$ ($x \notin E, \ln\text{-meas}\, E < +\infty$) рівномірно по $y \in \mathbb{R}$.

Подібно, як і в [3], виникає запитання про можливість послабити умову (3), накладаючи, можливо, додаткові умови на показники ряду (1). Як і в [3], відповідь на це запитання позитивна.

Надалі розглядатимемо лише підкласи S_0^+, $S_0^+(a)$, до яких належать лише ряди Діріхле відповідно з S_0 і $S_0(a)$, зі строго зростаючою до $+\infty$ системою показників $\lambda = (\lambda_n)$, $0 < \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \le n \uparrow)$.

1 Формулювання основного результату

Для того, щоб сформулювати і потім довести основний результат статті, нам потрібне поняття мажоранти Ньютона ряду Діріхле, а також деякі її властивості.

Мажоранту Ньютона довільного ряду (1) будуємо, як і в [4, с.163] (див. також [5, с.682]). У прямокутній системі координат $\lambda O\mu$ позначимо точки P_n з координатами $(\lambda_n, -\ln|a_n|)$ і проведемо з них вертикальні промені V_n в напрямку додатної півосі $O\mu$. Позначимо через Q опуклу оболонку множини $\bigcup_{n\ge0} V_n$. Якщо множина Q не є півплощиною, то кожна пряма $\{(\lambda, \mu) : \lambda = \lambda_n\}$, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, перетинає межу ∂Q множини Q в єдиній точці $\widetilde{P}_n$ з координатами $(\lambda_n, -\ln a_n^*) \overset{\text{def}}{=} (\lambda_n, -\mu_n^*)$. Формальний ряд $F_* = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* e^{z\lambda_n}$ називаємо *мажорантою Ньютона* ряду (1).

За побудовою ([5]):

(i) $a_n^* \ge |a_n|$ $(n \ge 0)$; (ii) $a_{n+1}^* \ge a_n^*$ $(n \ge 0)$; (iii) $\varkappa_n^* \overset{\text{def}}{=} \frac{\mu_n^* - \mu_{n+1}^*}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \uparrow 0$ $(n \to +\infty)$; (iv) $\mu(x, F) = \mu(x, F_*)$ $(x < 0)$.

Наступна лема містить ще одну властивість мажоранти Ньютона.

Лема 1.1 ([4])**.** *Нехай σ_F і σ_{F_*} — абсциси абсолютної збіжності ряду (1) і мажоранти Ньютона ряду (1) відповідно. Якщо $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$, то*

$$\sigma_{F_*} = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln a_n^*}{\lambda_n} = \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n} = \sigma_F.$$

Сформулюємо тепер основний результат.

Теорема 1. *Нехай функція $F \in S_0(a)$, а додатна неспадна на $[t_0, +\infty)$ функція $\psi(t)$ — така, що $(\exists\alpha \in (0, 1))(\forall t \ge t_0) : \ln\psi(t) \le t^\alpha$. Якщо виконуються умови*

$$\ln n = o(\lambda_n) \quad (n \to +\infty),$$

$$(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)\colon \quad \lambda_n - \lambda_{n_0} \geq \mu_n^* \psi(\mu_n^*) \tag{5}$$

і

$$\frac{1}{\ln \psi\left(\frac{\mu_n^*}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\mu_{k+1}^* - \mu_k^*} = o(1) \quad (n \to +\infty), \tag{6}$$

то співвідношення (4) виконується при $x \to -0$ *зовні деякої множини* E *нульової логарифмічної щільності* ($D_{\ln_0} E \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{R \to -0} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{|R|}\right)} \ln\text{-meas}\,(E \cap [-1, R]) = 0$) *рівномірно по* $y \in \mathbb{R}$.

Схема доведення теореми 1 подібна до схеми доведення відповідної теореми з [1]. Відмінність полягає в тому, що умова (6) не припускає з необхідністю збіжності ряду (3), і тому виникають додаткові труднощі, зокрема, з оцінками залишків ряду Діріхле.

Зауваження. З умови (6) випливає, що $\mu_n^* \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

2 Доведення основного результату

Доведення теореми 1. Як і в [1], позначимо $b_n = e^{-\lambda_n}$ і розглянемо ряд

$$f(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{s\mu_n^*}. \tag{7}$$

За нерівністю Коші-Буняковського і умовою $\ln \psi(t) \leq t^\alpha$ $(t \geq t_0)$ отримаємо

$$\frac{1}{\ln \psi\left(\frac{\mu_n^*}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\mu_{k+1}^* - \mu_k^*} \geq \frac{n^2}{\mu_n^* - \mu_0^*} \cdot \frac{2^\alpha}{(\mu_n^*)^\alpha},$$

а отже, з умови (6) маємо

$$n^{\frac{2}{1+\alpha}} = o(\mu_n^*) \quad (n \to +\infty), \tag{8}$$

тому $\ln n = o(\mu_n^*)$, а отже, з огляду на (5), $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$.

Оскільки для кожного фіксованого $x < 0$ з огляду на лему 1.1 виконується співвідношення $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln a_n^* - \lambda_n |x|) = -\infty$, тобто $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mu_n^* + |x| \ln b_n) = -\infty$, то звідси, враховуючи, що $\mu_n^* \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, з огляду на довільність x отримаємо $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{\mu_n^*} \ln b_n\right) = +\infty$. Далі, оскільки з (5) і (8) випливає, що $\ln n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$, за лемою 1.1 отримуємо, що ряд (7) — абсолютно збіжний скрізь в $\mathbb{C}$.

Наступне допоміжне твердження фактично доведено в [1, с.122-123].

Лема 2.1. *Нехай* $f(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{s\mu_n^*} \in S$, $\mu_n^* \uparrow +\infty$ $(0 \leq n \uparrow +\infty)$, *а* (ε_k) — *послідовність така, що* $0 \leq \varepsilon_k \leq 1/2$ $(k \geq 0)$. *Тоді існує множина* $E_0 \subset [1, +\infty)$ *така, що для кожного* $\sigma \in [1, +\infty) \setminus E_0$ *виконуються рівності*

$$\nu(\sigma(1 \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)})) = \nu(\sigma), \quad \nu(\sigma) = \nu(\sigma, f), \tag{9}$$

і для всіх $\sigma \in [1, +\infty)$ *для логарифмічної міри* E_0 *справджується оцінка*

$$\ln\text{-meas}\,(E_0 \cap [1, \sigma)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{E_0 \cap [1,\sigma)} d \ln x \leq 3 \sum_{k=0}^{\nu(\sigma-0)} \varepsilon_k.$$

Доведення. Нехай σ_j — послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(\sigma, f)$, занумерована так, що $\nu(\sigma, f)$ для $\sigma \in [\sigma_j, \sigma_{j+1})$; якщо $\nu(\sigma_{j+1}, f) = j + p$, $p \geq 2$, то вважаємо, що $\sigma_{j+1} = \ldots = \sigma_{j+p} < \sigma_{j+p+1}$.

В [1] доведено, що рівності (9) на проміжку $[\sigma_j, \sigma_{j+1})$ можуть не виконуватися лише на множині $I_j = \left[\sigma_j, \frac{\sigma_j}{1-\varepsilon_j}\right) \cup \left[\frac{\sigma_{j+1}}{1+\varepsilon_j}, \sigma_{j+1}\right)$. Для логарифмічної міри I_j маємо

$$\ln\text{-meas}\,(I_j) \leq \ln \frac{1}{1-\varepsilon_j} + \ln(1+\varepsilon_j) \leq 3\varepsilon_j = 3\varepsilon_{\nu(\sigma_{j+1}-0)}.$$

Якщо $\sigma \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$, то для логарифмічної міри множини $E_0 = \bigcup_{j=0}^{+\infty} I_j$ отримаємо

$$\ln\text{-meas}\,(E_0 \cap [1, \sigma)) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \ln\text{-meas}\,(I_j) + \ln\text{-meas}\,(I_n \cap [\sigma_n, \sigma)) \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\nu(\sigma-0)} \ln\text{-meas}\,(I_j) \leq 3 \sum_{j=0}^{\nu(\sigma-0)} \varepsilon_j.$$

Лему 2.1 доведено. □

Подібно, як і в [3], визначимо $q(k) = n_0(2\mu_k^*) - 1$ $(k \geq 0)$, де $n_0(t) = \sum_{\mu_k^* \in [0,t]} 1$ — лічильна функція послідовності (μ_k^*), і

$$\delta(l, j) = (j - l + 1)^{-3/2} \sum_{m=l}^{j} \frac{1}{\mu_{m+1}^* - \mu_m^*} \quad (0 \leq l \leq j),$$
$$\delta_k = \sup\{\delta(l, j) \colon 0 \leq l \leq k-1, \quad k-1 \leq j \leq q(\nu) - 1\}.$$

Наступні леми доведено в [3].

Лема 2.2. *Якщо функція $\varphi(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$, то з умови*

$$\frac{1}{\varphi(\frac{\mu_n^*}{2})} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\mu_{k+1}^* - \mu_k^*} = o(1) \quad (n \to +\infty)$$

випливає, що існує послідовність $c_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ така, що $\varepsilon_k = \delta_k c_k \in [0, 1/2]$ $(k \geq 0)$, і виконується умова

$$\frac{1}{\varphi(\mu_n^*)} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Лема 2.3. *Нехай $\mu_n^* \uparrow +\infty$, а $q(k)$ і ε_k — визначені вище. Тоді*

$$\Sigma_0 \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\nu-1} e^{-\varepsilon_\nu |\mu_n^* - \mu_\nu^*|} + \sum_{n=\nu+1}^{q(\nu)} e^{-\varepsilon_\nu |\mu_n^* - \mu_\nu^*|} = o(1) \quad (\nu \to +\infty).$$

Доведення наступної леми подібне до доведення леми 4 з [3].

Лема 2.4. *Якщо для функції $F \in S_0(a)$ виконуються умови теореми 1, то*

$$\Sigma_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=q(\nu)+1}^{+\infty} |a_n| e^{x\lambda_n} = o(\mu(x,F))$$

при $x \to -0$ зовні деякої множини E_1 скінченної логарифмічної міри.

Доведення. В [3] фактично доведено таке твердження.

Лема 2.5. *Нехай $\psi(t)$ — додатна неспадна функція така, що $\psi(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ і $(\exists \alpha \in (0,1))(\forall t \geq t_0) : \ln \psi(t) \leq t^\alpha$. Нехай послідовність $\mu_n^* \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ і виконується умова (6). Тоді існує $c_n^* \uparrow +\infty$ така, що $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^*}{\mu_n} < +\infty$, $\frac{c_n^*}{\mu_n} \in [0, 1/2]$ і*

$$\int_{2\mu_{\nu^*}}^{+\infty} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\mu_\nu^*} - 1\right) c_{\nu^*}\right\} dn(t) = o(1) \quad (\nu \to +\infty).$$

Застосуємо лему 2.1 до визначеної вище функції $f \in S$ вигляду (7) з $\varepsilon_n = \frac{c_n^*}{\mu_n^*}$, де $0 \leq c_n^* \uparrow +\infty$ — послідовність така, що $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n^*}{\mu_n^*} < +\infty$ і $\varepsilon_n \in [0, 1/2]$ $(n \geq 0)$. Тоді, за лемою 2.1, рівності (9) виконуються для всіх $\sigma \in [1, +\infty) \setminus E_2$, $\ln\text{-meas}\,(E_2 \cap [1, \sigma)) \leq 3 \sum\limits_{k=1}^{\nu(\sigma-0)} \varepsilon_k$, звідки

$$\ln\text{-meas}\, E_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ln\text{-meas}\,(E_2 \cap [1, +\infty)) \leq 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k < +\infty,$$

тобто E_2 має скінченну логарифмічну міру на проміжку $[1, +\infty)$. Отже, для всіх $\sigma \in [1, +\infty) \setminus E_2$ за означенням максимального члена функції f і за допомогою рівностей (9) послідовно отримуємо

$$b_n \exp\{\sigma(1 \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)})\mu_n^*\} \leq \mu(\sigma(1 \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)}), f) = b_{\nu(\sigma)} \exp\{\sigma(1 \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)})\mu_{\nu(\sigma)}^*\},$$

звідки

$$b_n e^{\sigma\mu_n^*} \leq \mu(\sigma, f) \exp\{\pm\varepsilon_{\nu(\sigma)}(\mu_{\nu(\sigma)}^* - \mu_n^*)\sigma\}. \tag{10}$$

Вибираючи знак “ - ” для $n < \nu(\sigma)$ і знак “ + ” для $n > \nu(\sigma)$, отримаємо нерівність

$$(\forall n \geq 0)(\forall \sigma \in [1, +\infty) \setminus E_2) : \quad b_n e^{\sigma\mu_n^*} \leq \mu(\sigma, f) \exp\{-\sigma|\mu_n^* - \mu_\nu^*|\varepsilon_\nu\}, \quad \nu = \nu(\sigma). \tag{11}$$

Оскільки $b_n = e^{-\lambda_n}$, $\mu_n^* = \ln a_n^*$, $\sigma = -\frac{1}{x}$, з (11) отримаємо для всіх $n \geq 0$ і $x \in [-1, 0) \setminus E_1$, де E_1 — образ множини E_2 при відображенні $x = -\frac{1}{\sigma}$,

$$|a_n| e^{x\lambda_n} \leq a_n^* e^{x\lambda_n} = (b_n e^{\sigma\mu_n^*})^{-x} \leq (\mu(\sigma, f))^{-x} (\exp\{-\sigma|\mu_n^* - \mu_\nu^*|\varepsilon_\nu\})^{-x} =$$
$$= \left(b_{\nu(\sigma,f)} e^{\sigma\mu_{\nu(\sigma,f)}^*}\right)^{-x} e^{-|\mu_n^* - \mu_{\nu(\sigma,f)}^*|\varepsilon_{\nu(\sigma,f)}} = \exp\{x\lambda_{\nu(\sigma,f)} + \mu_{\nu(\sigma,f)}^*\} \cdot e^{-|\mu_n^* - \mu_{\nu(\sigma,f)}^*|\varepsilon_{\nu(\sigma,f)}}.$$

Зауважимо, що для $n \neq \nu(\sigma, f)$ і $\varepsilon_{\nu(\sigma,f)} \neq 0$ маємо $e^{-|\mu_n^* - \mu_{\nu(\sigma,f)}^*|\varepsilon_{\nu(\sigma,f)}} < 1$. Отже

$$|a_n| e^{x\lambda_n} \leq e^{x\lambda_{\nu(\sigma,f)} + \mu_{\nu(\sigma,f)}^*} = a_{\nu(\sigma,f)}^* e^{x\lambda_{\nu(\sigma,f)}} = \mu(x, F_*),$$

звідки $\mu(x, F) = \mu(x, F_*) = a^*_{\nu(\sigma,f)} e^{x\lambda_{\nu(\sigma,f)}} = |a_{\nu(\sigma,f)}| e^{x\lambda_{\nu(\sigma,f)}}$, а тому $\nu(x, F) = \nu(\sigma, f) = \nu\Big(-\frac{1}{x}, f\Big)$ і $(\mu(\sigma, f))^{-x} = b^{-x}_{\nu(x,F)} e^{\mu^*_{\nu(x,F)}} = |a_{\nu(x,F)}| e^{\lambda_{\nu(x,F)} x} = \mu(x, F)$.

Отже, для всіх $n \geq 0$ і $x \in [-1, 0) \setminus E_1$ маємо

$$|a_n| e^{x\lambda_n} \leq \mu(x, F) e^{-|\mu^*_n - \mu^*_\nu| c^*_\nu / \mu^*_\nu},$$

а тому

$$\Sigma_1/\mu(x, F) \leq \sum_{n=q(\nu)+1}^{+\infty} \exp\Big\{-\Big(\frac{\mu^*_n}{\mu^*_\nu} - 1\Big) c^*_\nu\Big\} = \sum_{\mu^*_n > 2\mu^*_\nu} \exp\{-(\mu^*_n/\mu^*_\nu - 1) c^*_\nu\} =$$

$$= \int_{2\mu^*_\nu}^{+\infty} \exp\Big\{-\Big(\frac{t}{\mu^*_\nu} - 1\Big) c^*_\nu\Big\} dn(t).$$

Звідси, за лемою 2.5 отримуємо твердження леми 2.4.

□

Завершення доведення теореми 1. Нехай E — образ множини E_0 з леми 2.1 при відображенні $x = -\frac{1}{\sigma}$. Тоді за лемою 2.1 маємо

$$\ln\text{-meas}\,(E \cap [-1, R)) = \int_{E\cap[-1,R)} d \ln\Big(-\frac{1}{x}\Big) =$$

$$= \int_{E_0 \cap [1, -\frac{1}{R})} d \ln t \leq 3 \sum_{k=0}^{\nu(0-\frac{1}{R}, f)} \varepsilon_k = 3 \sum_{k=0}^{\nu(R-0, F)} \varepsilon_k.$$

Оскільки при $R \to -0$ для $n = \nu(R - 0, F)$ маємо $0 \leq \ln \mu(R, F) - \ln |a_{n_0}| - \lambda_{n_0} R = \mu^*_n - \mu^*_{n_0} + (\lambda_n - \lambda_{n_0}) R$, то $|R| \leq \frac{\mu^*_n - \mu^*_{n_0}}{\lambda_n - \lambda_{n_0}}$, а отже

$$\frac{1}{|R|} \geq \frac{\lambda_n - \lambda_{n_0}}{\mu^*_n - \mu^*_{n_0}} \geq \frac{\mu^*_n \psi(\mu^*_n)}{\mu^*_n - \mu^*_{n_0}} = (1 + o(1)) \psi(\mu^*_n) \quad (n \to +\infty).$$

Звідси

$$\frac{1}{\ln\Big(\frac{1}{|R|}\Big)} \int_{E\cap[-1,R)} d \ln\Big(-\frac{1}{x}\Big) \leq \frac{4 \sum_{k=0}^{\nu(R-0,F)} \varepsilon_k}{\ln \psi(\mu^*_{\nu(R,F)})} \leq \frac{4 \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k}{\ln \psi(\mu^*_n)} \to 0 \quad (R \to -0).$$

Тут ми скористались лемою 2.2 з функцією $\varphi(x) = \ln \psi(x)$.

Нехай $x \in [-1, 0) \setminus E$. Тоді $\sigma = -\frac{1}{x} \in [1, +\infty) \setminus E_0$ і за лемою 2.1, подібно, як і у доведенні леми 2.4, за означенням $\mu(\sigma, f)$ послідовно отримаємо, що нерівність (10) виконується з довільним вибором знаків "$\pm$", звідки, вибираючи знаки, як і у доведенні леми 2.4, отримуємо нерівність (11) для всіх $\sigma \in [1, +\infty] \setminus E_0$. Тепер з (11) для всіх n і всіх $x \in [-1, 0) \setminus E$ отримуємо

$$|a_n| e^{x\lambda_n} \leq \left(\mu\left(-\frac{1}{x}, f\right)\right)^{-x} \exp\left\{-\varepsilon_{\nu(-\frac{1}{x}, f)} \left|\mu^*_n - \mu^*_{\nu(-\frac{1}{x}, f)}\right|\right\}.$$

Як і в доведенні леми (2.4) , маємо $\nu\Big(-\frac{1}{x}, f\Big) = \nu(x, F)$ і $\Big(\mu(-\frac{1}{x}, f)\Big)^{-x} = \mu(x, F)$. Отже, для $x \in [-1, 0) \setminus E$ і всіх $n \geq 0$

$$|a_n|e^{x\lambda_n} \leq \mu(x, F)\exp\{-\varepsilon_{\nu(x,F)}|\mu_n^* - \mu_{\nu(x,F)}^*|\}.$$

Застосовуючи леми 2.3 і 2.4, при $x \to -0$ ($x \notin E \cup E_1$) отримаємо

$$\frac{1}{\mu(x, F)}\left|F(x + iy) - a_{\nu(x,F)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x,F)}}\right| \leq \Sigma_1/\mu(x, F) + \Sigma_0 = o(1)$$

рівномірно по $y \in \mathbb{R}$. Оскільки множина $E \cup E_1$ має нульову логарифмічну щільність, теорему 1 доведено. □

Література

1. Скаскив О.Б. *О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей*// Мат. заметки. – 1994. – Т.56, №5. – С.117–128.
2. Стасюк Я.З. *Про ряди Діріхле з монотонними коефіцієнтами і остаточність опису виняткової множини*// Матем. вісник НТШ. – 2008. – Т.5. – С.202 –207.
3. Скасків О.Б., Стасюк Я.З. *Про еквівалентність суми і максимального члена цілого ряду Діріхле з монотонними коефіцієнтами*// Математичні студії. – 2009. – Т.31, № 1. – С.37–46.
4. Гече Ф.И., Онипчук С.В. *Об абсциссах сходящегося ряда Дирихле и его мажоранты Ньютона*// Укр. мат. журн. – 1974. – Т. 26, № 2. – С.161–168.
5. Скаскив О.Б. *О росте в полуполосах аналитических функций, представленных рядами Дирихле*// Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45, № 5. – С.681–693.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна.

Надійшло 10.04.2009

Ya.Z.Stasyuk, O.B.Skaskiv *On the equivalence of the sum and the maximal term of the Dirichlet series absolutely convergent in the half-plane*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 100–106.

For absolutely convergent in the half-plane $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ Dirichlet series $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, where $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ $(0 \leq n \uparrow +\infty)$, we establish conditions on the coefficients of its Newton majorant, sufficient for the relation $F(x + iy) = (1 + o(1))a_{\nu(x)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}}$ to hold as $x \to -0$ outside some set E of zero logarithmic density in the point 0, uniformly by $y \in \mathbb{R}$.

Я.З.Стасюк, О.Б.Скаскив *Об эквивалентности суммы и максимального члена абсолютно сходящегося в полуплоскости ряда Дирихле // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 100–106.

Для абсолютно сходящихся в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ рядов Дирихле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, где $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ $(0 \leq n \uparrow +\infty)$, установлены условия на коэффициенты его мажоранты Ньютона, достаточные для справедливости соотношения $F(x + iy) = (1 + o(1))a_{\nu(x)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}}$ при $x \to -0$ вне некоторого множества E нулевой логарифмической плотности в точке 0, равномерно по $y \in \mathbb{R}$.