Карпатські математичні публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №.1

УДК 517.988.6:517.988.8

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А.

ЗАСТОСУВАННЯ ІТЕРАЦІЙНИХ АЛГОРИТМІВ ТА ГІЛЛЯСТИХ ДРОБІВ В.Я. СКОРОБАГАТЬКА ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ КОРЕНІВ ПОЛІНОМІВ У БАНАХОВИХ АЛГЕБРАХ

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Застосування ітераційних алгоритмів та гіллястих дробів В.Я. Скоробагатька для апроксимації коренів поліномів у банахових алгебрах* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 82–86.

Досліджено ітераційні алгоритми для наближеної факторизації окремих класів поліномів з коефіцієнтами з банахової алгебри, які водночас є алгоритмами побудови аналогів гіллястих дробів В.Я. Скоробагатька у банахових алгебрах.

Для додатнього лінійного неперервного оператора $A : H \to H$ ($H-$ гільбертів простір), в [9] встановлено існування додатнього лінійного неперервного оператора $B : H \to H$, який задовольняє рівність $B^2 = A$, а в [5] обґрунтовано його єдиність. Докладну інформацію з цього приводу можна знайти в [2]. Оператор B називають квадратним коренем оператора A і позначають $B = A^{\frac{1}{2}}$. Достатні умови існування коренів m-го степеня ($m \geq 2$) з елементів банахової алгебри E з одиницею встановлені в [6]. Застосована в [6] методика не містить конструктивного алгоритму для знаходження цих коренів. Дослідженням методів знаходження коренів з матричних поліномів та їх застосуванням присвячені, зокрема, монографії [1]-[3]. У [7] запропоновано методику для обґрунтування існування та практичного знаходження коренів поліномів вигляду

$$F(s) = s^{m+1} + \sum_{i=0}^{m} A_i s^i \tag{1}$$

та

$$F(s) = s^{m+1} + \sum_{i=0}^{m} s^i A_i \tag{2}$$

з коефіцієнтами A_i, які належать до банахової алгебри E з одиницею. Зазначена методика використовує ітераційний алгоритм для апроксимації коренів полінома $F(x)$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 41A65, 30B70.

Ключові слова і фрази: банахова алгебра, корені полінома, ітераційні алгоритми, гіллясті дроби.

У пропонованій замітці досліджені ітераційні алгоритми для поліномів (1) та (2). Отримані результати охоплюють результати і з [7] (див. також [4]). Як частковий випадок отримано умови існування та спосіб наближеного знаходження коренів полінома $F(s)$ вигляду

$$F(s) = s^{m+1} - A_0,$$

де $A_0 \in E$. Вони не випливають з результатів [9]-[6]. Ітераційні алгоритми для знаходження $A^{\frac{1}{m+1}}$ не кореспондуються зі способом знаходження $A^{\frac{1}{2}}$, який використовується в [2].

Нехай $A_i\,(i = 0, 1, ..., m)$ є елементами банахової алгебри E з одиницею I і нульовим елементом θ. Розглянемо рівняння

$$F(s) = \theta, \tag{3}$$

вважаючи задля конкретності, що $F(s)$ є поліномом вигляду (1). Задамо попарно різні комплексні числа $\alpha_j\,(j = \overline{1, m})$ припустивши, що вони відмінні від нуля. Позначимо через M множину таких елементів $s \in E$, що числа α_j не є власними числами елементів $s \in M$. Іншими словами M є множиною елементів із E, для яких існують обернені елементи $(s - \alpha_j I)^{-1} \in E$. За цих обставин рівність (3) можна записати у вигляді

$$s = s_0 - F(s)\Phi^{-1}(s) \tag{4}$$

для довільного $s \in M$, де $\Phi(s) = \prod_{j=\overline{1,m}}(s - \alpha_j I)$. Рівність (4) подамо також у вигляді

$$s = s_0 - \sum_{i=\overline{1,m}} K_i(s - \alpha_i I)^{-1}. \tag{5}$$

Очевидно, що має місце тотожність

$$s - F(s)\Big(\prod_{j=\overline{1,m}}(s - \alpha_j I)\Big)^{-1} \equiv s_0 - \sum_{i=\overline{1,m}} K_i(s - \alpha_i I)^{-1}. \tag{6}$$

Елементи $K_i\,(i = \overline{1, m})$ та $s_0 \in M$ знаходимо з таких міркувань. Зафіксуємо індекс j і помножимо обидві частини рівності (6) на $(s - \alpha_j I)$. Отримаємо

$$s(s-\alpha_j I) - F(s)\prod_{j=\overline{1,m}}(s-\alpha_j I)^{-1} = s_0(s-\alpha_j I) - K_j - \sum_{i=\overline{1,m},i\neq j} K_i(s-\alpha_i I)^{-1}(s-\alpha_j I). \tag{7}$$

Рівність (7) справджується для всіх $s \in M_j$, де множину M_j отримано з множини M приєднанням до неї елемента $s = \alpha_j I$. З рівності (7) при $s = \alpha_j I$ знаходимо

$$K_j = \frac{1}{\Phi'(\alpha_j)} F(\alpha_j I).$$

Тут $\Phi'(\alpha_j) = \prod_{i=\overline{1,m},i\neq j}(\alpha_j - \alpha_i)$. Оскільки до множини M належить нульовий елемент θ, то з рівності (6) при $s = \theta$ випливає рівність

$$s_0 = -\frac{A_0}{\prod_{i=\overline{1,m}}(-\alpha_i)} - \sum_{i=\overline{1,m}} \frac{F(\alpha_i I)}{\alpha_i \prod_{i=\overline{1,m}, i\neq j}(\alpha_j - \alpha_i)}. \tag{8}$$

Для обчислення s_0 можна скористатися також формулою

$$s_0 = -(A_m + I \sum_{i=\overline{1,m}} \alpha_i),$$

яку можна отримати, якщо після домноження рівності (6) справа на $\Phi(s)$, прирівняти коефіцієнти при s^m.

Отже, рівняння (5) можна подати у вигляді

$$s = -(A_m + I \sum_{i=\overline{1,m}} \alpha_i) - \sum_{i=\overline{1,m}} \frac{1}{\Phi'(\alpha_i)} F(\alpha_i I)(s - \alpha_i I)^{-1}.$$

Нехай $T_0 \in E$, $T_0 \neq \alpha_i I\,(i = \overline{1,m})$ і $\widetilde{M} = \{s : \|s - T_0\| < 1, s \in E\}$. Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$T_{n+1} = s_0 - \sum_{i=\overline{1,m}} K_i(T_n - \alpha_i I)^{-1}. \tag{9}$$

Теорема 1. *Припустимо, що*

$$T_0 = S_0, T_1 \in \widetilde{M}, \alpha_i \neq 1, \|F(\alpha_i I)\| \leq k_j \Phi'(\alpha_j) \tag{10}$$

$$\sum_{i=\overline{1,m}} \frac{k_i}{(|\alpha_i| - 1)^2} \leq q \leq 1. \tag{11}$$

Тоді існує єдиний в кулі $\widetilde{M}$ розв'язок s^* рівняння (3) з означеним за (1) поліномом $F(s)$ і до s^* збігається не повільніше за геометричну прогресію зі знаменником q послідовність $\{T_n\}$, побудована з допомогою формули (9).

Доведення. На підставі рівності (5) із того, що $s', s'' \in M$, отримаємо

$$s' - s'' = \sum_{i=\overline{1,m}} K_i((s'' - \alpha_i I)^{-1} - (s' - \alpha_i I)^{-1}) = -(s' - s'') \sum_{i=\overline{1,m}} K_i((s' - \alpha_i I)^{-1}(s'' - \alpha_i I)^{-1}. \tag{12}$$

Тому співвідношення (9)-(12) призводять до нерівності

$$\|T_{n+1} - T_n\| \leq q\|T_n - T_{n-1}\|.$$

З умови (11) випливає також, що $T_n \in \widetilde{M}$ для довільного $n = 0, 1, ...$ Отже, перетворення

$$T(s) \equiv s_0 - \sum_{i=\overline{1,m}} K_i(s - \alpha_i I)^{-1}$$

є стиском в $\widetilde{M}$. Це гарантує існування $\lim_{n\to\infty} T_n = s^* \in \widetilde{M}$. Елемент s^* є розв'язком рівняння (3) з означеним за (1) поліномом $F(s)$ і цей розв'язок є єдиним в $\widetilde{M}$. □

Як наслідок з цієї теореми отримуємо наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай*

$$\alpha = \min_{i=\overline{1,m}} |\alpha_i|, k = \max K_i. \tag{13}$$

Якщо $T_o, T_1 \in \widetilde{M}$ *та*

$$\frac{km}{(\alpha-1)^2} \le q < 1, \tag{14}$$

то послідовність $\{T_n\}$*, побудована за допомогою формули*

$$T_n = s_0 + k(T_n - \alpha I)^{-1}$$

збігається до єдиного розв'язку $s^* \in \widetilde{M}$ *рівняння (3) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q*, означеним за допомогою формул (13), (14). Конструкцію алгоритму (9) можна розглядати як алгоритм побудови гіллястого дробу В.Я. Скоробагатька, який отримується послідовним вкладенням* $(n+1)$*-ої ітерації в* n*-ту. В тому разі, коли* $F(s)$ *є поліномом у числовому полі* E*, зокрема, у полі комплексних чисел* C*, отримуються гіллясті дроби з числовими компонентами.*

Приклад 1. *Застосуємо алгоритм (9) до матричного рівняння* $X^2 - Ax = \theta$*, де*

$$A = \begin{pmatrix} 2,1000 & 0,3000 \\ 0,1000 & 2,2000 \end{pmatrix},$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $\alpha = 2$*, тоді*

$$s_0 = -A - \alpha I = \begin{pmatrix} 2,1000 & 0,3000 \\ 0,1000 & 2,2000 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1000 & 0,3000 \\ 0,1000 & 0,2000 \end{pmatrix}$$

$$f(\alpha I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,1000 & 0,3000 \\ 0,1000 & 2,2000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2000 & 0,6000 \\ 0,2000 & 0,4000 \end{pmatrix}$$

$$T_0 = s_0, T^{(1)} = \begin{pmatrix} -0,0624 & -0,1186 \\ -0,0023 & -0,0114 \end{pmatrix}, T^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,0194 & 0,168 \\ 0,0139 & 0,0998 \end{pmatrix},$$

$$T^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,0036 & -0,0001 \\ 0,0000 & 0,0000 \end{pmatrix}$$

Приклад 2. *Для полінома* $F(s) = (s-2)(s-4)(s-10)$ *покладемо* $\alpha_1 = 1,8,\ \alpha_2 = 4,5$*. Тоді* $s_0 = 16 - \alpha_1 - \alpha_2 = 9,7$*. Застосовуючи алгоритм (9), знаходимо такі наближення:* $s_1 = 10,020521; s_2 = 9,998686; s_3 = 10,000084$ *для кореня* $s = 10$ *цього рівняння.*

Приклад 3. *Застосуємо алгоритм (9) для ітераційного уточнення кореня* $s = 2i$ *полінома* $F(s) = (s^2+1)(s^2+4)$*. Приймемо* $\alpha_1 = -0,9i, \alpha_2 = 0,9i, \alpha_3 = -2,1i$*. При* $s_0 = 2,1i$ *перші дві ітерації дають такі наближені уточнення* $s_1 = 2,0075331i, s_2 = 2,0006170i$ *до цього кореня.*

Література

1. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наукова думка, 1981. – 224 с.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М: Наука, 1977.– 741 с.
3. Маршус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.
4. Обшта А., Шувар Б. *Гіллясті дроби та ітераційні алгоритми для апроксимації коренів поліномів* // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. – 2009. – С.294-295.
5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М: ЧЛ, 1954. – 589 с.
6. Рудин У. Функциональный анализ. – М: Мир, 1975. – 443 с.
7. Шувар Б.А., Шуляр М.А. *Про нулі полінома із коефіцієнтами із алгебри Банаха* // Вісник Львівського політехнічного інституту. Математика. Механіка.– 1977 – Т.119.
8. Kaczorek T. Polinomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. Springer: Communications and Control Engineering.Dordrecht, 2007. – 503 p.
9. Visser H. *Note on linear operators*, Akad. Wetensch. Anst. Rhoc, **40** (1937), 270-272.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 22.04.2010

Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. *On applications of iteration algorithms and Skorobagatko's branching fractions to approximation of roots of polynomials in Banach algebras*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 82–86.

Iteration algorithms for approximate factorization of some classes of polynomials with coefficients from a Banach algebra are investigated. These algorithms may be considered as methods of construction of analogues of V.Ya. Skorobagatko's branching fractions in Banach algebras.

Копач М.И., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Применение итерационных алгоритмов и ветвящихся дробей В.Я. Скоробагатька для аппроксимации корней полиномов в банаховых алгебрах* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 82–86.

Исследованы итерационные алгоритмы для приближенной факторизации некоторых классов полиномов с коэффициентами из банаховой алгебры, которые одновременно суть алгоритмы построения аналогов ветвящихся дробей В.Я. Скоробагатька в банаховых алгебрах.