Карпатські математичні
публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical
Publications. V.2, №2

УДК 515.12+512.58

Савченко О.

ПРОДОВЖЕННЯ ЧАСТКОВИХ РОЗМИТИХ МЕТРИК

Савченко О. *Продовження часткових розмитих метрик* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 111–115.

Доведено, що існує неперервний оператор продовження стаціонарних часткових розмитих метрик. Основний результат є аналогом теореми Е. Тимчатина і М. Зарічного для розмитих метрик.

Вступ

Теорії продовження неперервних функцій і неперервних метрик певний час розвивалися паралельно. Аналогом одного з останніх результатів для неперервних функцій — теореми про існування лінійних операторів продовження функцій зі змінною областю визначення [4] — є аналогічна теорема для неперервних метрик [9].

Недавно автор одержав аналоги деяких результатів про продовження для розмитих метрик [7]. Нагадаємо, що поняття розмитого метричного простору (fuzzy metric space) тісно пов'язане з поняттям ймовірнісного метричного простору [8], яке, в свою чергу, є узагальненням поняття метричного простору. У ймовірнісних метричних просторах значення відстані є не числами, як у випадку метричних просторів, а функціями розподілу. Існує кілька версій поняття розмитого метричного простору, однією з найпоширеніших є версія запропонована в [2].

Інтерес до розмитих метричних просторів викликаний не лише їх різноманітними застосуваннями, але також і тим фактом, що структура розмитого метричного простору багатша, ніж структура метричного простору. Це може бути проілюстровано хоча б тим фактом, що існує поняття повного розмитого простору, та, на відміну від випадку метричних просторів, існують як поповнювані, так і непоповнювані розмиті метричні простори. Теорія розмитих метричних просторів розвивається у різних напрямках, і зараз розмитим метричним просторам присвячено багато літератури. Загальною проблемою є знаходження змістовних аналогів результатів метричної геометрії та топології метричних просторів у теорії розмитих метричних просторів.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.
Ключові слова і фрази: розмита метрика, метрика Прохорова, оператор продовження.

У цій статті ми розглядаємо задачу одночасного продовження розмитих метрик. Основний результат є аналогом теореми Тимчатина і Зарічного зі статті [9].

1 Розмиті метрики

Нагадаємо, що неперервною t-нормою називають бінарну операцію $*\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, що задовольняє умови:

(i) $*$ — асоціативна і комутативна;

(ii) $*$ — неперервна;

(iii) $a*1=a$ для кожного $a\in[0,1]$;

(iv) $a*b\le c*d$, якщо $a\le c$ і $b\le d$, де $a,b,c,d\in[0,1]$.

Коротко кажучи, неперервна t-норма — це бінарна операція $*\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, така що трійка $([0,1],\le,*)$ є впорядкованим абелевим топологічним моноїдом з одиницею 1. Прикладами t-норм є функції $a*b=ab$, $a*b=\min\{a,b\}$, $a*b=\max\{a+b-1,0\}$, $a,b\in[0,1]$ (остання t-норма називається t-нормою Лукасєвича).

Означення 1.1. *([2]).* Розмитим метричним простором *називають упорядковану трійку $(X,M,*)$, таку що X — непорожня множина, $*$ — неперервна t-норма і M — розмита множина на $X\times X\times(0,+\infty)$, що задовольняє умови*

(i) $M(x,y,t)>0$;

(ii) $M(x,y,t)=1$ *тоді і лише тоді, коли* $x=y$;

(iii) $M(x,y,t)=M(y,x,t)$;

(iv) $M(x,y,t)*M(y,z,s)\le M(x,z,t+s)$;

(v) функція $M(x,y,-)\colon(0,+\infty)\to(0,1]$ *— неперервна*

для всіх $x,y,z\in X$, $s,t>0$.

Функцію M називають *розмитою метрикою* на X (стосовно $*$). Нехай $x\in X$, $r\in(0,1)$ і $t>0$. Множина $B(x,r,t)=\{y\in X\mid B(x,y,t)>1-r\}$ називається *кулею радіуса r з центром у точці x, що відповідає t*. Множина всіх куль служить базою для (метризовної) топології на X (див. [2]). Надалі у розмитому метричному просторі будемо розглядати лише цю топологію. Для кожного $A\subset X$, $r\in(0,1)$, $t\in(0,\infty)$ приймемо $A^{r,t}=\cup\{B(x,r,t)\mid x\in A\}\subset X$.

Якщо функція $M(x,y,-)\colon(0,+\infty)\to(0,1]$ — стала для кожних $x,y\in X$, то таку розмиту метрику називають *стаціонарною розмитою метрикою* на X. У цьому випадку пишуть $M(x,y)$ замість $M(x,y,t)$, $B(x,r)$ замість $B(x,r,t)$ та A^r замість $A^{r,t}$.

2 Простір часткових розмитих метрик

Нехай X — метризовний простір. Через $\mathcal{SFM}$ позначаємо множину всіх розмитих метрик, означених на непорожніх компактних підмножинах множини X. Той факт, що стаціонарна розмита метрика M означена на множині A, записуємо так: $A = \mathrm{dom}(M)$ або $M \in \mathcal{SFM}(A)$.

Нагадаємо, що гіперпростір $\exp Y$ метризовного простору Y — це множина непорожніх компактних підмножин в Y; якщо топологія в Y породжується метрикою d, то топологія в $\exp Y$ породжується метрикою Гаусдорфа d_H:

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset B^r,\ B \subset A^r\}$$

(тут через C^r позначено r-окіл множини C).

Оператором продовження часткових розмитих метрик називають відображення

$$e\colon \bigcup_{A \in \exp X} \mathcal{SFM}(A) \to \mathcal{SFM}$$

таке, що виконано умову

$$e(M)|(\mathrm{dom}(M) \times \mathrm{dom}(M) \times (0, \infty)) = M$$

для кожного $M \in \mathcal{SFM}$.

На множині $\mathcal{SFM}$ можна означити топологію, індуковану ототожненням кожної розмитої метрики M з її графіком $\Gamma_M = \{(x, y, M(x, y)) \mid (x, y) \in X \times X\}$, який, у свою чергу, є елементом гіперпростору $\exp(X \times X \times [0, 1])$.

Через $P(X)$ позначимо простір ймовірнісних мір на компактному просторі X. У статті [6] розглянуто розмитий аналог метрики Прохорова на компактному розмитому просторі $(X, M, *)$, де через $*$ позначено t-норму Лукасєвича.

Функція $\hat{M}\colon P(X) \times P(X) \times (0, \infty) \to [0, 1]$ визначається формулою

$$\begin{aligned}\hat{M}(\mu, \nu, t) =& 1 - \inf\{r \in (0, 1) \mid \mu(A) \le \nu(A^{r,t}) + r \text{ і } \nu(A) \le \mu(A^{r,t}) + r \\ & \text{для кожної борелівської множини } A \subset X\}.\end{aligned}$$

Легко бачити, що для кожної стаціонарної розмитої метрики M розмита метрика $\hat{M}$ теж є стаціонарною.

Теорема 1. *Нехай X — компактний метризовний простір. Тоді існує неперервний оператор продовження часткових розмитих метрик $e\colon \bigcup_{A \in \exp X} \mathcal{SFM}(A) \to \mathcal{SFM}$.*

Доведення. Розглянемо підпростір $Y = \{(A, \mu) \in \exp(X) \times P(X) \mid A \supset \mathrm{supp}(\mu)\} \subset \exp(X) \times P(X)$ і нехай $f\colon Y \to \exp X$ — звуження проектування на перший співмножник. Відображення f має опуклі прообрази, і з загальних результатів теорії функторів у категорії компактів випливає, що f відкрите. З теореми Майкла про селекцію [5] випливає, що відображення f м'яке, тобто володіє властивістю продовження параметризованих часткових селекцій [1]. Зокрема, відображення $\varphi\colon Z \to Y$, де $Z = \{(A, x) \mid x \in A\} \subset \exp X \times X$, визначене формулою $\varphi(A, x) = (A, \delta_x)$, має продовження $\Phi\colon \exp X \times X \to Y$ таке, що $f\Phi = \mathrm{pr}_1\colon \exp X \times X \to \exp X$ (проекція на першу координату).

Визначимо тепер оператор e' формулою

$$e'(M)(x, y) = \hat{M}(\Phi(\mathrm{dom}(M), x), \Phi(\mathrm{dom}(M), y)),$$

де $M \in \bigcup_{A \in \exp X} \mathcal{SFM}(A)$, $x, y \in X$.

Взагалі кажучи, $e'(M)$ може бути стаціонарною розмитою псевдометрикою на X, тобто рівність $e'(M)(x, y) = 1$ не гарантує, що $x = y$. Міркуючи, як і в доведенні основного результату з статті [9], можемо знайти зліченну сім'ю відображень $\{\Phi_i\colon \exp X \times X \to Y \mid i \in \mathbb{N}\}$ таку, що для кожних $M \in \bigcup_{A \in \exp X} \mathcal{SFM}(A)$ і кожних $x, y \in X$ існує таке $i \in \mathbb{N}$, що $\hat{M}(\Phi_i(\mathrm{dom}(M), x), \Phi_i(\mathrm{dom}(M), y)) < 1$. Тепер визначимо

$$e(M)(x, y) = \min_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \left\{ \max\{\hat{M}(\Phi(\mathrm{dom}(M), x), \Phi(\mathrm{dom}(M), y)), 1 - \frac{1}{i} \right\} \right\}.$$

Зі сказаного вище, а також результатів статті [7] про розмиті метрики на зліченних степенях випливає, що e — оператор продовження часткових розмитих метрик.

Перевірка неперервності одержаного оператора відбувається аналогічно, як і у статті [9]. $\square$

Аналогічну задачу можна сформулювати і для нестаціонарних розмитих метрик. Основна трудність, яка при цьому виникає, полягає в тому, що області визначення таких метрик будуть некомпактними. Відповідний результат про продовження неперервних функцій з некомпактними областями визначення отримано в [3].

Література

1. Щепин Е.В. *Функторы и несчетные степени компактов* // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, вып. 3. – С. 3–62.

2. George A., Veeramani P.V. *On some results in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, **64** (1994), 395–399.

3. Koyama A., Stasyuk I., Tymchatyn E.D., Zagorodnyuk A. *Continuous linear extension of functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **138** (2010), 4149–4155.

4. Künzi H.P., Shapiro L.B. *On simultaneous extension of continuous partial functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 1853–1859.

5. Michael E. *Selected selection theorems*, Amer. Math. Monthly, **63** (1956), 233–238.

6. Repovš D., Savchenko A., Zarichnyi M., *Fuzzy Prokhorov metric on the set of probability measures* (submitted)

7. Savchenko O. *Extension of fuzzy metrics: zero-dimensional case* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія механіко-математична. – Вип. 71, 2009. – С. 204–212.

8. Schweizer B., Sklar A. Probabilistic Metric Spaces, Elsevier Science Publishing Company, 1983.

9. Tymchatyn E.D., Zarichnyi M., *On simultaneous linear extensions of partial (pseudo)metrics*, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004), no. 9, 2799–2807.

Херсонський аграрний університет,
Херсон, Україна

Надійшло 13.10.2010

Savchenko A. *Extensions of partial fuzzy metrics*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 111–115.

It is proved that there exists a continuous extension operator for stationary partial fuzzy metrics. The main result is a counterpart of a theorem of E. Tymchatyn and M. Zarichnyi for fuzzy metrics.

Савченко А. *Продолжения частичных нечетких метрик* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 111–115.

Доказано, что существует непрерывный оператор продолжения стационарных частичных нечетких метрик. Основной результат является аналогом теоремы Э. Тимчатина и М. Заричного для нечетких метрик.