Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.956.4

Копитко Б.І., Мильо О.Я., Цаповська Ж.Я.

ПАРАБОЛІЧНА ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ ІЗ ЗАГАЛЬНИМИ КРАЙОВОЮ УМОВОЮ ТА УМОВОЮ СПРЯЖЕННЯ ТИПУ ВЕНТЦЕЛЯ

Копитко Б.І., Мильо О.Я., Цаповська Ж.Я. *Параболічна задача спряження із загальними крайовою умовою та умовою спряження типу Вентцеля* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 55–73.

У статті розглядається питання про існування у класі Гельдера розв'язку початково-крайової задачі для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами з крайовою умовою та умовою спряження, які, як і рівняння в області, визначаються лінійними параболічними операторами другого порядку.

У цій праці за допомогою методу параболічних потенціалів досліджується питання про класичну розв'язність у класі Гельдера параболічної задачі спряження з припущенням, що на внутрішній і зовнішній межі області з класу Гельдера $H^{2+\lambda}$ задані умова спряження та крайова умова типу Вентцеля. Зауважимо, що задачі з крайовим оператором другого порядку еліптичного та параболічного типів для параболічних рівнянь другого порядку виникають в теорії випадкових процесів при вивченні задачі про "склеювання"дифузійних процесів [3, 8].

У такій постановці сформульована нами задача вивчається уперше. Раніше подібні задачі вивчалися методом потенціалу в роботах [10] – [13]. В [1] і [15] початково-крайова задача Вентцеля вивчалася за допомогою інших методів, а в монографіях [4, 5, 7] для параболічних крайових задач розгорнуто загальну теорію.

1 Основні позначення та деякі означення

Нехай $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — n-вимірний евклідів простір; $\mathbb{R}_T^{n+1} = \mathbb{R}^n \times (0,T)$, $T > 0$ — фіксоване; $\mathbb{R}_T^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (0,T)$; $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$ — точка в $\mathbb{R}^n$;

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.
Ключові слова і фрази: клас Гельдера, початкова-крайова задача для лінійного параболічного рівняння другого порядку, лінійні параболічні оператори другого порядку.

© Копитко Б.І., Мильо О.Я., Цаповська Ж.Я., 2010

$x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ — точка в $\mathbb{R}^{n-1}$; $(x,t) = (x', x_n, t)$ — точка в $\mathbb{R}^{n+1}_T$; (x',t) — точка в $\mathbb{R}^n_T$; $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i$; $|x|^2 = (x,x) = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2$; $|x'|^2 = (x',x') = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2$.

Розглянемо в $\mathbb{R}^n$ обмежену область $\mathcal{D}$ з гладкою межею S. Припустимо, що $\mathcal{D}$ розділена на дві області $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$ поверхнею S_1, причому $S \cap S_1 = \varnothing$. Нехай при цьому $\mathcal{D}_1$ — підобласть з межею S_1, а $\mathcal{D}_2$ — підобласть з межею $S_2 = S \cup S_1$. Через $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ та $\nu^{(1)}(x) = (\nu_1^{(1)}(x), \dots, \nu_n^{(1)}(x))$ позначатимемо одиничні вектори внутрішніх нормалей по відношенню до області $\mathcal{D}_2$ в точках $x \in S$ та $x \in S_1$ відповідно. Покладемо $\overline{\mathcal{D}}_m = \mathcal{D}_m \cup S_m$, $\Omega_m = \mathcal{D}_m \times (0,T)$, $\Sigma_m = S_m \times [0,T]$, $m = 1,2$, $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup S$, $\Sigma = S \times [0,T]$.

Введемо позначення для операторів диференціювання: D_t^r і D_x^p — символи частинної похідної по t з порядком r і будь-якої частинної похідної по x з порядком p відповідно, де r, p — цілі невід'ємні числа; $D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$; $D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$; $D_{ij} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1, \dots, n$; $\nabla = (D_1, \dots, D_n)$, δ_i та $\delta_i^{(1)}$ $(i = 1, \dots, n)$ — тангенціальний диференціальний оператор на S та S_1 відповідно, тобто $\delta_i = \sum\limits_{k=1}^n \tau_{ik} D_k$, де $\tau_{ik} = \delta_i^k - \nu_i \nu_k$, $\delta_i^{(1)} = \sum\limits_{k=1}^n \tau_{ik}^{(1)} D_k$, де $\tau_{ik}^{(1)} = \delta_i^k - \nu_i^{(1)} \nu_k^{(1)}$, δ_i^k — символ Кронекера. Використовуватимемо визначені в [6] простори Гельдера $H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_T)$, $H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma_m)$, $H^{l+\lambda}(\mathbb{R}^n)$ $(l = 0,1,2;\ m = 1,2;\ \lambda \in (0,1)$ – фіксоване) та клас поверхонь $H^{2+\lambda}$. Підмножину функцій з $H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{B})$, які (у випадку $l = 2$ разом з похідною по t) перетворюються в нуль при $t = 0$ позначатимемо через $\underset{\circ}{H}^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{B})$, а через $||w||_{H^{l+\lambda}(\overline{B})}$ та $||w||_{H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{B})}$ позначатимемо норму функції w в $H^{l+\lambda}(\overline{B})$ та $H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{B})$, де $\overline{B}$ — одна з множин $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^{n+1}_T$ або Σ_m, $m = 1,2$, відповідно. Всюди нижче C, та c — додатні сталі, які не залежать від (x,t), конкретні величини яких нас цікавити не будуть.

2 Параболічні потенціали

Розглянемо у шарі $\mathbb{R}^{n+1}_T$ два рівномірно параболічні оператори другого порядку з обмеженими коефіцієнтами вигляду

$$L_s u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(s)}(x,t) D_{ij} u + \sum_{i=1}^n a_i^{(s)}(x,t) D_i u + a_0^{(s)}(x,t) u - D_t u, \qquad s = 1,2. \tag{1}$$

Припускатимемо, що коефіцієнти операторів L_1 і L_2 визначені в $\mathbb{R}^{n+1}_T$ і виконані умови:

(A1) $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}^{(s)}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \delta_{0s}|\xi|^2$, $\ a_{ij}^{(s)} = a_{ji}^{(s)}$, $\ \delta_{0s} > 0$, $\ s = 1,2$, $\ \forall (x,t) \in \overline{\mathbb{R}}^{n+1}_T$, $\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$;

(A2) $a_{ij}^{(s)}$, $a_i^{(s)}$, $a_0^{(s)} \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_T)$, $\quad s = 1,2, \quad i,j = 1, \dots, n$.

Умови (A1), (A2) забезпечують існування звичайного фундаментального розв'язку (ф.р.) $G_s(x,t;\xi,\tau)$ $(0 \le \tau < t \le T,\ x,\xi \in \mathbb{R}^n)$ для оператора L_s, $s = 1,2$ [6]:

$$G_s(x,t;\xi,\tau) = G_{0s}^{(\xi,\tau)}(x,t;\xi,\tau) + G_{1s}(x,t;\xi,\tau), \qquad s = 1,2, \tag{2}$$

де

$$G_{0s}^{(\xi,\tau)}(x,t;\xi,\tau) = G_{0s}^{(\xi,\tau)}(x'-\xi', x_n-\xi_n, t-\tau) = (2\sqrt{\pi})^{-n}(\det A_s(\xi,\tau))^{-1/2}(t-\tau)^{-n/2}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{(A_s^{-1}(\xi,\tau)(x-\xi), x-\xi)}{4(t-\tau)}\right\}, \qquad s=1,2, \qquad t>\tau, \tag{3}$$

$A_s(\xi,\tau) = \left(a_{ij}^{(s)}(\xi,\tau)\right)_{i,j=1}^{n}$, $A_s^{-1}(\xi,\tau) = \left(a^{ij}_{(s)}(\xi,\tau)\right)_{i,j=1}^{n}$ — матриця, обернена до матриці $A_s(\xi,\tau)$, G_{1s} — інтегральний член, який має більш "слабку" особливість, ніж $G_{0s}^{(\xi,\tau)}$ з (3) при $t\to\tau+0$ і $G_s\equiv 0$, якщо $t\le\tau$. До того ж існують такі додатні сталі C і c, що для функцій G_s і G_{1s} при $0\le\tau<t\le T$, $x,\xi\in\mathbb{R}^n$, $2r+p\le 2$, справедливі оцінки

$$|D_t^r D_x^p G_s(x,t;\xi,\tau)| \le C(t-\tau)^{-(n+2r+p)/2} \exp\left\{-c\,\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}, \tag{4}$$

$$|D_t^r D_x^p G_{1s}(x,t;\xi,\tau)| \le C(t-\tau)^{-(n+2r+p-\lambda)/2} \exp\left\{-c\,\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}. \tag{5}$$

Розглянемо параболічні потенціали простого шару:

$$u_s^{(1)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{S_1} G_s(x,t;\xi,\tau)V_s(\xi,\tau)d\sigma_\xi, \qquad (x,t)\in\mathbb{R}_T^{n+1}, \qquad s=1,2, \tag{6}$$

$$u_2^{(0)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{S} G_2(x,t;\xi,\tau)V_0(\xi,\tau)d\sigma_\xi, \qquad (x,t)\in\mathbb{R}_T^{n+1}, \tag{7}$$

де V_s, $s=1,2$, та V_0 — задані відповідно на Σ_1 та Σ обмежені вимірні функції. Як наслідок з оцінок (4), (5), функції $u_s^{(1)}$, $u_2^{(0)}$ неперервні в $\overline{\mathbb{R}}_T^{n+1}$, задовольняють рівняння $L_s u_s^{(1)}=0$, $s=1,2$, в $\mathbb{R}_T^{n+1}\backslash\Sigma_1$, $L_s u_2^{(0)}=0$, в $\mathbb{R}_T^{n+1}\backslash\Sigma$ і початкову умову $u_s^{(1)}(x,0)=0$, $u_2^{(0)}(x,0)=0$.

Нехай для $(x,t)\in\Sigma_1$ та $(x,t)\in\Sigma$ визначені вектори конормалей $N^{(s)}(x,t) = (N_1^{(s)}(x,t),\ldots,N_n^{(s)}(x,t))$, $N_i^{(s)}(x,t)=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x,t)\nu_j^{(1)}(x)$, $i=1,\ldots,n$, $s=1,2$, та $N(x,t) = (N_1(x,t),\ldots,N_n(x,t))$, $N_i(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(2)}(x,t)\nu_j(x)$, $i=1,\ldots,n$. Якщо $V_s\in \underset{\circ}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)$, $s=1,2$, $V_0\in \underset{\circ}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$, то $u_s^{(1)}\in \underset{\circ}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Omega}_s)$, $s=1,2$, $u_2^{(0)}\in \underset{\circ}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Omega}_2)$ (див. [2], [6], [14]) і для конормальної похідної функцій $u_s^{(1)}$, $s=1,2$, та $u_2^{(0)}$ правильна формула стрибка ([6, с. 459])

$$\frac{\partial u_s^{(1)}(x,t)}{\partial N^{(s)}(x,t)} = \int_0^t d\tau \int_{S_1} \frac{\partial G_s(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(s)}(x,t)}\, V_s(\xi,\tau)d\sigma_\xi + (-1)^{s-1}\frac{1}{2}\,V_s(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma_1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_2^{(0)}(x,t)}{\partial N(x,t)} = \int_0^t d\tau \int_{S} \frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N(x,t)}\, V_0(\xi,\tau)d\sigma_\xi - \frac{1}{2}\,V_0(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma. \tag{9}$$

Існування інтегралу у правій частині (8) випливає з нерівності ($0 \le \tau < t \le T$, $x, \xi \in S_1$)

$$\left|\frac{\partial G_s(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(s)}(x,t)}\right| \le C(t-\tau)^{-(n+1-\lambda)/2} \exp\left\{-c\,\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}, \tag{10}$$

яка є вірною і для ядра $\frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N(x,t)}$ у формулі (9) при $0 \le \tau < t \le T$, $x, \xi \in S$.

За допомогою ф.р. G_s, $s = 1, 2$, з (2) визначають ще два параболічні потенціали, які застосовують при розв'язанні задачі Коші для загального параболічного рівняння другого порядку. Це – потенціал Пуассона

$$u_s^{(2)}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_s(x,t;\xi,0)\varphi_s(\xi)d\xi, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}_T^{n+1}, \qquad s = 1, 2, \tag{11}$$

і об'ємний потенціал

$$u_s^{(3)}(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_s(x,t;\xi,\tau)f_s(\xi,\tau)d\xi, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}_T^{n+1}, \qquad s = 1, 2, \tag{12}$$

де $\varphi_s(\xi)$ і $f_s(\xi,\tau)$, $s = 1, 2$ — задані функції. Якщо припустити, що φ_s — обмежена і неперервна в $\mathbb{R}^n$, а $f_s \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}_T^{n+1})$, то відомо (див. [6, гл. IV, § 14]), що функції $u_s^{(2)}$, $u_s^{(3)}$, $s = 1, 2$, неперервні в $\overline{\mathbb{R}}_T^{n+1}$, та задовольняють рівняння $L_s u_s^{(2)} = 0$, $L_s u_s^{(3)} = -f_s$, $s = 1, 2$, в $\mathbb{R}_T^{n+1}$ і початкові умови $u_s^{(2)}(x,0) = \varphi_s(x)$, $u_s^{(3)}(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $s = 1, 2$. До того ж $u_s^{(2)} \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}_T^{n+1})$, а у випадку, коли $\varphi_s \in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^n)$, і $u_s^{(3)} \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}_T^{n+1})$.

3 Регуляризатор першої крайової задачі

Визначимо крайові оператори $\mathcal{E}_s$, $s = 0, 1, 2$, які потім використаємо в якості регуляризаторів системи інтегральних рівнянь Вольтерри, еквівалентної до сформульованої у п. 4 початково-крайової задачі. Зауважимо, що конструкція цих операторів повністю збігається з конструкцією інтегро-диференціального оператора $\mathcal{E}$, який вперше був введений у роботах [2, 14]. Опишемо структуру оператора $\mathcal{E}_0$, який пов'язаний з оператором L_2 та потенціалом $u_2^{(0)}$. Припустимо спочатку, що $S = \mathbb{R}^{n-1}$, а отже, $\Sigma = \mathbb{R}_T^n$. Розглянемо в $\mathbb{R}_T^n$ параболічний оператор наступного вигляду:

$$L_2' = \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}^{(2)}(x',t)D_{ij} - D_t, \tag{13}$$

де $h_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(2)} - a_{in}^{(2)}a_{nj}^{(2)}\left(a_{nn}^{(2)}\right)^{-1}$, $i, j = 1, \ldots, n-1$.

Нехай $\mathcal{H}_2(x',t;\xi',\tau)$ ($0 \le \tau < t \le T$, $x', \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$) — ф.р. для оператора L_2', і нехай функція ψ задана в $\mathbb{R}_T^n$. Позначимо ($(x',t) \in \mathbb{R}_T^n$)

$$\mathcal{E}_0(x',t)\psi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left.\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{H}_2(x',\hat{t};\xi',\tau)\psi(\xi',\tau)d\xi'\right\}\right|_{\hat{t}=t}. \tag{14}$$

Лема 3.1. *([2], [14]). Оператор $\mathcal{E}_0$ є лінійним обмеженим оператором, що відображає простір $\underset{\circ}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$ на простір $\underset{\circ}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$. При цьому існує обернений оператор $\mathcal{E}_0^{-1}: \underset{\circ}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T) \to \underset{\circ}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$.*

Зауваження 3.1. *Використовуючи схему доведення леми 3.1, ми встановлюємо також, що оператор $\mathcal{E}_0$ відображає простір $\underset{\circ}{H}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$ на простір $\underset{\circ}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$ і при цьому існує обернений оператор $\mathcal{E}_0^{-1}: \underset{\circ}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T) \to \underset{\circ}{H}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$.*

Зауважимо, що $\mathcal{E}_0$ — регуляризатор у випадку першої крайової задачі (модельної) (див. [2, 10, 14]), а саме:

$$\mathcal{E}_0(x',t)u_2^{(0)} = (A_2(x',t)\nu(x'),\nu(x'))^{-1/2}\,V_0(x',t)+$$

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} K_{20}(x',t;\xi',\tau)V_0(\xi',\tau)d\xi', \quad \forall\, V_0 \in \underset{\circ}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}^n_T), \tag{15}$$

до того ж для ядра K_{20} справедлива оцінка (10), у правій частині якої вираз $|x-\xi|^2$ треба замінити на вираз $|x'-\xi'|^2$.

Розглянемо тепер випадок, коли межа S області $\mathcal{D}$ — елементарна поверхня, тобто $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = F(x')\}$, де функція F задовольняє умову

$$F \in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{16}$$

Надалі позначатимемо значення будь-якої функції $v(x,t)$ на $\Sigma = S \times [0,T]$ через $\overline{v}(x',t)$. Тоді регуляризатор $\mathcal{E}_0$ можна визначити рівністю (14), в якій ядро

$$\overline{\mathcal{H}}_2(x',t;\xi',\tau) = \mathcal{H}_2(x,t;\xi,\tau)|_{x_n=F(x'),\xi_n=F(\xi')}$$

є ф.р. оператора (13) з коефіцієнтами

$$\bar{\tilde{h}}_{ij}^{(2)} = \bar{\tilde{a}}_{ij}^{(2)} - \bar{\tilde{a}}_{in}^{(2)}\bar{\tilde{a}}_{nj}^{(2)}\left(\bar{\tilde{a}}_{nn}^{(2)}\right)^{-1}, \tag{17}$$

де $\tilde{a}_{ij}^{(2)} = \tilde{a}_{ji}^{(2)} = a_{ij}^{(2)}$, $i,j = 1,\ldots,n-1$, $\tilde{a}_{in}^{(2)} = \tilde{a}_{ni}^{(2)} = a_{in}^{(2)} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{ik}^{(2)}F_k$, $i = 1,\ldots,n-1$, $\tilde{a}_{nn}^{(2)} = a_{nn}^{(2)} - 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{kn}^{(2)}F_k + \sum\limits_{k,l=1}^{n-1} a_{kl}^{(2)}F_kF_l$, $F_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$, $k = 1,\ldots,n-1$.

Що стосується дії оператора $\mathcal{E}_0$ на потенціал $u_2^{(0)}$, то її результат визначається рівністю (15).

Переходимо до загального випадку. Припустимо, що межа S області $\mathcal{D}$ — будь-яка обмежена гіперповерхня загального вигляду з класу $H^{2+\lambda}$. Нагадаємо, (див. [2, 6]), що S називають поверхнею класу $H^{2+\lambda}$, якщо кожна її точка x^0 має окіл O_{x^0} такий, що множина $S \cap O_{x^0}$ описується в локальній (місцевій) системі координат $\{y\} = \{y_1,\ldots,y_n\}$, зв'язаній з точкою x^0, рівнянням

$$y_n = F_{x^0}(y'), \quad y' \in \overline{B}_{x^0}, \quad F_{x^0} \in H^{2+\lambda}(\overline{B}_{x^0}),$$

де $B_{x^0} = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} \,|\, |y'| < d\}$, до того ж стала $d > 0$ не залежить від точки x^0, і скінченною буде величина $\sup\limits_{x \in S} ||F_x(y)||_{H^{2+\lambda}(\overline{B}_x)}$.

Покладемо $\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{x \in \mathcal{D} \,|\, \inf\limits_{x_0 \in S} |x - x_0| < \varepsilon\right\}$, $(\varepsilon > 0)$, і нехай μ — будь-яке мале додатне число $(0 < \mu < d/2)$. Тоді (див. [9]) існує така скінченна множина фіксованих точок $\left\{x^{(m)} \in S\right\}$, $m = 1, \ldots, N$, що області $\mathcal{D}_j^{(m)}$, $j = 1, 2$, в локальній системі координат $\{y\}$, зв'язаній з точкою $x^{(m)}$, записують у вигляді

$$\mathcal{D}_j^{(m)} = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, |y'| < j\mu,\, |y_n - F_{x^{(m)}}(y')| < j\mu\}, \qquad j = 1, 2,$$

і вони володіють властивостями:

1) існує таке число $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$, що $\mathcal{D}_\varepsilon \subset \bigcup\limits_m \mathcal{D}_1^{(m)}$;

2) існує таке ціле число N_0 (яке не залежить від μ), що перетин будь-яких $N_0 + 1$ областей $\mathcal{D}_2^{(m)}$ порожній.

Введемо "розбиття одиниці", що підпорядковане покриттю $\bigcup\limits_m \mathcal{D}_2^{(m)}$ "межевої смуги" $\mathcal{D}_\varepsilon$, а саме систему функцій $\left\{\omega^{(m)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\right\}$ з наступними властивостями:

$$0 \le \omega^{(m)} \le 1, \qquad \omega^{(m)} = 1 \text{ при } x \in \mathcal{D}_1^{(m)}, 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{D}_2^{(m)},$$

$$\operatorname{supp}(\omega^{(m)}) \subset \mathcal{D}_2^{(m)}, \qquad \sum_{m=1}^{N} \omega^{(m)}(x) = 1, \quad \text{якщо } x \in \mathcal{D}_\varepsilon, \tag{18}$$

і нехай

$$\alpha^{(m)} = \omega^{(m)} \left[\sum_{m=1}^{N} \left(\omega^{(m)}\right)^2\right]^{-1}, \qquad S_j^{(m)} = \mathcal{D}_j^{(m)} \cap S, \quad j = 1, 2. \tag{19}$$

Нехай $\{y, t\}$ — місцева система координат в точці $x^{(m)}$. Координати $\{x\}$ і $\{y\}$ зв'язані співвідношенням

$$Y = C^{(m)}(X - X^{(m)}),$$

де $C^{(m)}$ — ортогональна матриця, X і Y — стовпці з координат $x_1, \ldots, x_n$ і $y_1, \ldots, y_n$ відповідно. Позначимо через $\overline{S}_{2,0}^{(m)}$ проекцію $\overline{S}_2^{(m)}$ на площину $y_n = 0$. Між точками $y \in \overline{S}_2^{(m)}$ і $y' \in \overline{S}_{2,0}^{(m)}$ існує взаємнооднозначна відповідність. Припускаємо, що $\overline{S}_2^{(m)}$ в локальній системі координат $\{y\}$ з початком в точці $x^{(m)}$ задається рівнянням

$$y_n = F_{x^{(m)}}(y') = F^{(m)}(y'), \quad y' \in \overline{S}_{2,0}^{(m)}, \tag{20}$$

де $F^{(m)}$ — функція з класу $H^{2+\lambda}(\overline{S}_{2,0}^{(m)})$.

Визначимо тепер за допомогою формули (17) функції $\bar{h}_{ij}^{(2,m)}(y', t)$, $(y', t) \in \overline{S}_{2,0}^{(m)} \times [0, T]$, $i, j = 1, \ldots, n-1$, $m = 1, \ldots, N$, у правій частині якої замість $\bar{\bar{a}}_{ij}^{(2)}$, $i, j = 1, \ldots, n$, треба покласти $\bar{\bar{\hat{a}}}_{ij}^{(2,m)}$, де $\hat{a}_{ij}^{(2,m)}$ — елементи матриці $\hat{A}_2^{(m)}(y', t) = C^{(m)} A_2^{(m)}(y', t)(C^{(m)})^T$, $A_2^{(m)}(y', t) = A_2(x(y), t)$. У свою чергу, використовуючи функції $\bar{h}_{ij}^{(2,m)}(y', t)$ та формулу

(13), визначимо в області $S_{2,0}^{(m)} \times (0,T]$ рівномірно параболічний оператор $L_2^{'(m)}$. Продовжимо коефіцієнти цього оператора на $\overline{\mathbb{R}}_T^{n,(m)} = \mathbb{R}^{n-1,(m)} \times [0,T]$ зі збереженням властивостей (A1), (A2) і позначимо через $\overline{\mathcal{H}}_2^{(m)}(y',t;\eta',\tau)$ $(0 \le \tau < t \le T,\ y',\eta' \in \mathbb{R}^{n-1,(m)})$ ф.р. для $L_2^{'(m)}$.

Нарешті визначимо функції

$$\mathcal{H}_2^{(m)}(x,t;\xi,\tau) \equiv \overline{\mathcal{H}}_2^{(m)}(y'(x),t;\eta'(\xi),\tau), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x,\,\xi \in \overline{S}_2^{(m)},$$

$$\mathcal{H}_2(x,t;\xi,\tau) = \sum_{m=1}^{N} \omega^{(m)}(x)\alpha^{(m)}(\xi)\mathcal{H}_2^{(m)}(x,t;\xi,\tau)\bar{\hat{\nu}}_n^{(m)}(\eta'(\xi)), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x,\,\xi \in S,$$

де $\hat{\nu}^{(m)}(y) = C^{(m)}\nu^{(m)}(y)$, $\nu^{(m)}(y) = \nu(x(y))$ і, припускаючи, що $\psi \in \underset{\circ}{H}^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma)$, $l=1,2$, покладемо при $(x,t) \in \Sigma$

$$\mathcal{E}_0^{(m)}\psi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \int_S \omega^{(m)}(x)\alpha^{(m)}(\xi)\mathcal{H}_2^{(m)}(x,\hat{t};\xi,\tau)\bar{\hat{\nu}}_n^{(m)}(\eta'(\xi))\psi(\xi,\tau)d\sigma_\xi \right\}\Bigg|_{\hat{t}=t},$$

$$\mathcal{E}_0(x,t)\psi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \int_S \mathcal{H}_2(x,\hat{t};\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)d\sigma_\xi \right\}\Bigg|_{\hat{t}=t} =$$

$$\sum_{m=1}^{N} \mathcal{E}_0^{(m)}(x,t)\psi. \tag{21}$$

Побудову оператора $\mathcal{E}_0$ завершено. У формулі (21) інтегро-диференціальні оператори $\mathcal{E}_0^{(m)}$, $m=1,\dots,N$, називатимемо локальними регуляризаторами. Їх властивості можна описати за допомогою тверджень, що належать до леми 3.1 та зауваження 3.1. З цих властивостей безпосередньо випливає наступне твердження.

Лема 3.2. *Оператор $\mathcal{E}_0$, визначений за формулою (21), є лінійним обмеженим оператором, що відображає простір $\underset{\circ}{H}^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma)$ на простір $\underset{\circ}{H}^{l-1+\lambda,(l-1+\lambda)/2}(\Sigma)$, $l=1,2$. При цьому рівняння $\mathcal{E}_0\psi = 0$ має в просторі $\underset{\circ}{H}^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma)$ лише тривіальний розв'язок $\psi = 0$.*

Подіємо оператором $\mathcal{E}_0$ на потенціал $u_2^{(0)}$ з (7). Враховуючи при цьому співвідношення (15), $\forall\, V_0 \in \underset{\circ}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$ одержимо

$$\mathcal{E}_0(x,t)u_2^{(0)} = (A_2(x,t)\nu(x),\nu(x))^{-1/2}\, V_0(x,t) + \int_0^t d\tau \int_S K_{20}(x,t;\xi,\tau)V_0(\xi,\tau)d\sigma_\xi, \tag{22}$$

до того ж, для ядра $K_{20}(x,t;\xi,\tau)$ в кожній області вигляду $0 \le \tau < t \le T$, $x,\xi \in S$, справедлива оцінка (10).

Крім регуляризатора $\mathcal{E}_0$, ми будемо використовувати також побудовані за аналогічною схемою граничні оператори $\mathcal{E}_s$, $s=1,2$, які пов'язані з поверхнею S_1, операторами L_s, $s=1,2$, та потенціалами $u_s^{(1)}$, $s=1,2$, з (6).

4 Постановка параболічної початково-крайової задачі з умовою спряження типу Вентцеля та її розв'язання

Розглянемо задачу спряження

$$L_s u_s(x,t) = -f_s(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega_s, \qquad s=1,2, \tag{23}$$

$$u_s(x,0) = \varphi_s(x), \qquad x\in\mathcal{D}_s, \qquad s=1,2, \tag{24}$$

$$L_3 u(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t) = z(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma_1\backslash S_1, \tag{25}$$

$$L_4 u(x,t) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}^{(1)}(x,t)\delta_i^{(1)}\delta_j^{(1)}u_2 + (\beta^{(1)}(x,t),\nabla u_2) + \beta_0^{(1)}(x,t)u_2 - D_t u_2 -$$
$$(\alpha(x,t),\nabla u_1) + \alpha_0(x,t)u_1 = \theta(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma_1\backslash S_1, \tag{26}$$

$$L_5 u(x,t) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\delta_i\delta_j u_2 + (\beta(x,t),\nabla u_2) + \beta_0(x,t)u_2 - D_t u_2 = \psi(x,t),$$
$$(x,t)\in\Sigma\backslash S, \tag{27}$$

де $u(x,t) = (u_1,u_2)$, $\alpha(x,t) = (\alpha_1(x,t),\ldots,\alpha_n(x,t))$, $\beta^{(1)}(x,t) = (\beta_1^{(1)}(x,t),\ldots,\beta_n^{(1)}(x,t))$, $\beta(x,t) = (\beta_1(x,t),\ldots,\beta_n(x,t))$.

Припускаємо, що коефіцієнти операторів L_1 і L_2 задовольняють умови (A1), (A2) з п.2, а коефіцієнти операторів типу Вентцеля L_4 і L_5 задовольняють наступні умови:

(B1) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}^{(1)}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \mu_{01}|\xi|^2$, $\beta_{ij}^{(1)} = \beta_{ji}^{(1)}$, $\mu_{01}>0$, $\forall\,(x,t)\in\Sigma_1$, $\forall\,\xi\in\mathbb{R}^n$, $\xi\perp\nu^{(1)}(x)$;
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \mu_0|\xi|^2$, $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, $\mu_0>0$, $\forall\,(x,t)\in\Sigma$, $\forall\,\xi\in\mathbb{R}^n$, $\xi\perp\nu(x)$;

(B2) $\beta_{ij}^{(1)}$, $\beta_i^{(1)}$, α_i, $\beta_0^{(1)}$, $\alpha_0 \in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)$, β_{ij}, β_i, $\beta_0 \in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $(\beta^{(1)},\nu^{(1)})\ge 0$, $(\alpha,\nu^{(1)})\ge 0$, $(\beta,\nu)\ge 0$.

Що стосується поверхонь S і S_1 та правих частин рівностей (23)–(27), то будемо вважати, що

$$S,\ S_1\in H^{2+\lambda}, \qquad \rho(S,S_1)\ge d_0>0, \tag{28}$$

$$f_s\in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}_T^{\,n+1}), \qquad \varphi_s\in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^n), \qquad s=1,2,$$
$$z\in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1), \qquad \theta\in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1), \qquad \psi\in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma), \tag{29}$$

і виконані умови узгодження

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x) = z(x,0),\ x\in S_1,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}^{(1)}(x,0)\delta_i^{(1)}\delta_j^{(1)}\varphi_2+(\beta^{(1)}(x,0),\nabla\varphi_2)-(\alpha(x,0),\nabla\varphi_1)+\beta_0^{(1)}(x,0)\varphi_2+$$

$$\alpha_0(x,0)\varphi_1-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(s)}(x,0)D_{ij}\varphi_s-\sum_{i=1}^{n}a_i^{(s)}(x,0)D_i\varphi_s-a_0^{(s)}(x,0)\varphi_s-f_s=$$

$$\theta(x,0)+(s-1)D_tz(x,t)|_{t=0},\qquad x\in S_1,\quad s=1,2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}(x,0)\delta_i\delta_j\varphi_2+(\beta(x,0),\nabla\varphi_2)+\beta_0(x,0)\varphi_2-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(2)}(x,0)D_{ij}\varphi_2-$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{(2)}(x,0)D_i\varphi_2-a_0^{(2)}(x,0)\varphi_2-f_2=\psi(x,0),\qquad x\in S. \tag{30}$$

Основним результатом статті є наступне твердження.

Теорема. *Нехай коефіцієнти операторів L_s, $s=1,2$, і L_4, L_5 задовольняють умови (A1), (A2) і (B1), (B2) відповідно, а для поверхонь S і S_1 та функцій f_s, φ_s, $s=1,2$, z, θ, ψ з (23)–(27) виконані умови (28), (29). Тоді при виконанні умов узгодження (30) задача (23)–(27) має єдиний розв'язок*

$$u_s\in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega}_s),\qquad s=1,2, \tag{31}$$

для якого справедлива оцінка

$$\sum_{s=1}^{2}\|u_s\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega}_s)}\le C\Bigg[\sum_{s=1}^{2}\|f_s\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\mathbb{R}_T^{n+1})}+$$

$$\sum_{s=1}^{2}\|\varphi_s\|_{H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^n)}+\|z\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1)}+\|\theta\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)}+\|\psi\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma)}\Bigg]. \tag{32}$$

Доведення. Будемо шукати розв'язок задачі (23)–(27) у вигляді

$$u_s(x,t)=\sum_{m=0}^{3}u_s^{(m)}(x,t),\qquad (x,t)\in\Omega_s,\qquad s=1,2, \tag{33}$$

де $u_1^{(0)}\equiv 0$, а функції $u_2^{(0)}$, $u_s^{(1)}$, $u_s^{(2)}$, $u_s^{(3)}$, $s=1,2$, визначені за формулами (6), (7), (11), (12). У зображенні (33) невідомими є функції V_m, $m=0,1,2$, що входять до потенціалів простого шару $u_2^{(0)}$, $u_s^{(1)}$, $s=1,2$. З властивостей потенціалів, описаних в п. 2, випливає, що для розв'язання задачі нам треба підібрати V_m, $m=0,1,2$, у такий спосіб, щоб для $u(x,t)$ виконувалися умови спряження (25), (26), крайова умова (27), а при виконанні умов узгодження (30), були правильними умова (31) та нерівність (32).

Припустимо a priori, що V_m, $m=0,1,2$, задовольняють умови

$$V_0\in \underset{\circ}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma),\quad V_s\in \underset{\circ}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1),\quad s=1,2, \tag{34}$$

і займемося спочатку вивченням крайової умови (27). З цією метою перетворимо рівність (27), виділивши в ній у виразах, що містять похідні першого порядку за просторовими змінними, окремо тангенціальну і конормальну складові. Таке перетворення легко здійснити, якщо скористатися співвідношенням

$$(\beta(x,t),\nabla u_2)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x,t)\tilde{\delta}_i u_1+\gamma(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial N(x,t)},$$

де $\tilde{\delta}_i=D_i-\frac{\nu_i}{(N,\nu)}\sum\limits_{k=1}^{n}N_kD_k$, $i=1,\dots,n$, — дотичний диференціальний оператор на S,

$$\gamma(x,t)=\frac{(\beta(x,t),\nu(x))}{(N(x,t),\nu(x))}.$$

Тоді умову (27) можна записати у вигляді ($(x,t)\in\Sigma\backslash S$):

$$\tilde{L}_5u(x,t)\equiv\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}(x,t)\delta_i\delta_ju_2+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x,t)\tilde{\delta}_iu_2+\beta_0(x,t)u_2-D_tu_2=\psi_0(x,t) \tag{35}$$

або

$$\tilde{L}_5u(x,t)\equiv\sum_{k,l=1}^{n}\tilde{\beta}_{kl}(x,t)D_{kl}u_2+\sum_{k=1}^{n}\tilde{\beta}_k(x,t)D_ku_2+\beta_0(x,t)u_2-D_tu_2=\psi_0(x,t), \tag{36}$$

де

$$\tilde{\beta}_{kl}(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}(x,t)\tau_{ik}(x)\tau_{jl}(x),\qquad k,l=1,\dots,n,$$

$$\tilde{\beta}_k(x,t)=\beta_k(x,t)-\gamma(x,t)N_k(x,t)-\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}(x,t)\delta_i(\nu_j(x)\nu_k(x)),$$

$$\psi_0(x,t)=\psi(x,t)-\gamma(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial N(x,t)}. \tag{37}$$

Як бачимо, до правої частини рівнянь (35), (36), тобто до функції ψ_0, входить похідна вздовж конормалі від шуканої функцій u_2, яку можна розкрити, використовуючи зображення (33). При цьому похідна $\frac{\partial u_2^{(0)}(x,t)}{\partial N(x,t)}$ визначається за допомогою формули (9), а для $\frac{\partial u_2^{(1)}(x,t)}{\partial N(x,t)}$ має місце співвідношення

$$\frac{\partial u_2^{(1)}(x,t)}{\partial N(x,t)}=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_1}\frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N(x,t)}V_2(\xi,\tau)d\sigma_\xi,\quad (x,t)\in\Sigma, \tag{38}$$

причому для ядра $\frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N(x,t)}$, враховуючи (28), легко отримати оцінку ($0\le\tau<t\le T$, $(x,t)\in\Sigma,(\xi,\tau)\in\Sigma_1$)

$$\left|\frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N(x,t)}\right|\le C\,\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\} \tag{39}$$

з деякою сталою C, яка залежить від d_0. Оцінка (39) гарантує нам існування інтеграла в правій частині (38).

Розглянемо (36) як автономне параболічне рівняння на $\Sigma\backslash S$. У цьому рівнянні, як випливає з умов теореми, умови (34), формул (37) та властивостей потенціалів (див. п. 2), його коефіцієнти $\tilde{\beta}_{kl}$, $\tilde{\beta}_k$, $k,l=1,2,\dots,n$, β_0 та права частина ψ_0 належать до класу $H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$. Відомо (див. [1, 2, 9, 14]), що для розв'язку u_2 цього рівняння, який задовольняє початкову умову

$$u_2(x,0)=\varphi_2(x), \qquad x\in S, \tag{40}$$

справедлива нерівність

$$\|u_2\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma)}\le C\left[\,\|\psi_0\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)}+\|\varphi_2\|_{H^{2+\lambda}(S)}\,\right]. \tag{41}$$

Знайдемо тепер інтегральне зображення розв'язку задачі Коші для рівняння (36). З цією метою для оператора $\tilde{L}_5$ побудуємо ф.р., який надалі позначатимемо через $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ $(0\le\tau<t\le T,\ x,\xi\in S)$. Насамперед відзначимо, що ідея, на якій базується побудова ф.р. Γ є подібною до ідеї, за допомогою якої було здійснено конструкцію регуляризатора $\mathcal{E}_0$ (див. п. 2). Відзначимо також, що функцію Γ та її похідні за змінними x і t можна оцінювати за допомогою нерівностей (4) та (5), замінюючи в їх правих частинах розмірність простору n на $n-1$.

Отже, спочатку розглядається випадок, коли $S=\mathbb{R}^{n-1}$. У цьому випадку $\delta_i=D_i$, $\tilde{\delta}_i=D_i$, $i=1,\dots,n-1$, $\tilde{\delta}_n=0$, а тому рівняння (36) перетворюється в лінійне параболічне рівняння другого порядку з гельдеровими коефіцієнтами, що розглядаються на $\Sigma=\mathbb{R}^n_T$, вигляду:

$$\tilde{L}_5\bar{u}\equiv\sum_{k,l=1}^{n-1}\bar{\beta}_{kl}(x',t)D_{kl}\bar{u}_2+\sum_{k=1}^{n-1}\bar{\bar{\beta}}_k(x',t)D_k\bar{u}_2+\bar{\beta}_0(x',t)\bar{u}_2-D_t\bar{u}_2=\bar{\psi}_0(x',t), \tag{42}$$

де

$$\bar{\bar{\beta}}_k(x',t)=\bar{\beta}_k(x',t)-\bar{\beta}_n(x',t)\,\frac{\bar{a}^{(2)}_{in}(x',t)}{\bar{a}^{(2)}_{nn}(x',t)}, \qquad \bar{\psi}_0(x',t)=\bar{\psi}(x',t)-\frac{\bar{\beta}_n(x',t)}{\bar{a}^{(2)}_{nn}(x',t)}\cdot\frac{\partial\bar{u}_2(x',t)}{\partial\bar{N}(x',t)}.$$

Існування ф.р. Γ для оператора $\tilde{L}_5$ забезпечують умови (B1), (B2).

Наступний крок — це припущення про те, що S — елементарна поверхня з класу $H^{2+\lambda}$, тобто $S=\{x\in\mathbb{R}^n|x_n=F(x')\}$, де функція $F(x')$ задовольняє умову (16). Даний випадок, який детально вивчений в роботі [10], можна звести до попереднього, якщо використати так зване розпрямлююче перетворення координат [9]:

$$(x,t)\to(z,t), \qquad z_i=x_i, \qquad i=1,\dots,n-1, \qquad z_n=x_n-F(x'),$$

яке межу S переводить у гіперплощину $\bar{S}=\{z\in\mathbb{R}^n|z_n=0\}$. Тут ми зауважимо лише, що в розглядуваному випадку параболічне рівняння відносно функції

$$\bar{u}_2(x',t)=u_2(x',F(x'),t),$$

якому відповідає шуканий ф.р. $\bar{\Gamma}(x', t; \xi', \tau)$ $(0 \le \tau < t \le T,\ x', \xi' \in \mathbb{R}^{n-1})$, безпосередньо можна отримати з рівняння (36), підставляючи там $D_n \bar{u}_2 = 0$, $D_{kn}\bar{u}_2 = 0$, $k = 1, \dots, n$, $\bar{\tilde{\beta}}_{kl}(x', t) = \tilde{\beta}_{kl}(x', F(x'), t)$, $k = 1, \dots, n-1$, $\bar{\tilde{\beta}}_k(x', t) = \tilde{\beta}_k(x', F(x'), t)$, $k = 1, \dots, n$, $\bar{\beta}_0(x', t) = \beta_0(x', F(x'), t)$, $\bar{\psi}_0(x', t) = \psi_0(x', F(x'), t)$:

$$\tilde{L}_5 \bar{u} \equiv \sum_{k,l=1}^{n-1} \bar{\tilde{\beta}}_{kl}(x', t) D_{kl}\bar{u}_2 + \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\tilde{\beta}}_k(x', t) D_k \bar{u}_2 + \bar{\beta}_0(x', t)\bar{u}_2 - D_t \bar{u}_2 = \bar{\psi}_0(x', t), \tag{43}$$

де коефіцієнти $\bar{\tilde{\beta}}_{kl}(x', t)$, $\bar{\tilde{\beta}}_k(x', t)$ та $\bar{\beta}_0(x', t)$ визначені формулами (37), і матриця

$$\bar{\tilde{B}}_{n-1}(x', t)) = \Big(\bar{\tilde{\beta}}_{kl}(x', t)\Big)_{k,l=1}^{n-1}$$

— невід'ємно визначена, симетрична та рівномірно невироджена, тобто для її коефіцієнтів виконана умова (B1).

Використаємо рівняння (43) для побудови ф.р. рівняння

$$\tilde{L}_5 u = 0, \qquad (x, t) \in S \times (0, T), \tag{44}$$

де $\tilde{L}_5 u$ визначається лівою частиною рівняння (35) або (36).

З цією метою введемо до розгляду функції

$$\bar{P}_0(x', t; \xi', \tau) = \bar{P}_0^{(\xi', \tau)}(x' - \xi', t - \tau) = (2\sqrt{\pi})^{-(n-1)} (\det \bar{\tilde{B}}_{n-1}(\xi', \tau))^{-1/2} (t - \tau)^{-(n-1)/2} \times$$
$$\exp\left\{ - \frac{\left(\left(\bar{\tilde{B}}_{n-1}(\xi', \tau)\right)^{-1} (x' - \xi'), x' - \xi'\right)}{4(t - \tau)} \right\}, \qquad 0 \le \tau < t \le T, \quad x', \xi' \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$\bar{\Gamma}_0(x', t; \xi', \tau) = \bar{\Gamma}_0^{(\xi', \tau)}(x' - \xi', t - \tau) = \bar{P}_0(x', t; \xi', \tau)\bar{\nu}_n(\xi'), \qquad 0 \le \tau < t \le T, \quad x', \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Тоді

$$P_0(x, t; \xi, \tau) = P_0^{(\xi, \tau)}(x' - \xi', t - \tau) = (2\sqrt{\pi})^{-(n-1)} (\det \tilde{B}_{n-1}(\xi, \tau))^{-1/2} (t - \tau)^{-(n-1)/2} \times$$
$$\exp\left\{ - \frac{\left(\left(\tilde{B}_{n-1}(\xi, \tau)\right)^{-1} (x' - \xi'), x' - \xi'\right)}{4(t - \tau)} \right\}, \qquad 0 \le \tau < t \le T, \quad x, \xi \in S,$$

$$\Gamma_0(x, t; \xi, \tau) = \Gamma_0^{(\xi, \tau)}(x' - \xi', t - \tau) = P_0(x, t; \xi, \tau)\nu_n(\xi), \qquad 0 \le \tau < t \le T, \quad x, \xi \in S.$$

Відзначимо, що функція $\bar{P}_0(x', t; \xi', \tau)$ — ф.р. рівняння

$$\sum_{k,l=1}^{n-1} \bar{\tilde{\beta}}_{kl}(\xi', \tau) D_{kl}\bar{u}_2(x', t) - D_t \bar{u}_2(x', t) = 0, \qquad (x', t) \in \mathbb{R}^n_T,$$

із замороженими у точці $(\xi', \tau) \in \overline{\mathbb{R}}^n_T$ коефіцієнтами. Функцію Γ_0 приймаємо за головну частину ф.р. рівняння (44), а ф.р. Γ цього рівняння будуємо з використанням методу Леві [6, гл. IV, § 11].

Нарешті, розглядаючи загальний випадок гіперповерхні $S \in H^{2+\lambda}$, зауважимо, що при побудові ф.р. Γ треба використати атлас многовиду S, що побудований за допомогою розбиття одиниці (18). У цьому випадку рівняння (36) у місцевій системі коorинат $\{y, t\}$ в точці $x^{(m)}$ запишемо у вигляді:

$$\tilde{L}_{5,(m)} u^{(m)} \equiv \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{\hat{\beta}}^{(m)}_{kl}(y,t) D_{kl} u_2^{(m)} + \sum_{k=1}^{n} \tilde{\hat{\beta}}^{(m)}_{k}(y,t) D_k u_2^{(m)} + \beta_0^{(m)}(y,t) u_2^{(m)} -$$

$$D_t u_2^{(m)} = \psi_0^{(m)}(y,t), \qquad (y,t) \in S \times (0,T], \tag{45}$$

де $u_2^{(m)}(y,t) = u_2(x(y),t)$, $\hat{\beta}^{(m)}_{kl}(y,t)$, $k,l = 1,\dots,n$, — елементи матриці

$$\hat{B}^{(m)}(y,t) = C^{(m)} B^{(m)}(y,t) (C^{(m)})^T, \quad B^{(m)}(y,t) = B(x(y),t) = (\beta_{ij}(x(y),t))_{i,j=1}^n,$$

$\hat{\beta}^{(m)}_k(y,t)$, $k = 1,\dots,n$, — координати вектора

$$\hat{\beta}^{(m)}(y,t) = C^{(m)} \beta^{(m)}(y,t), \quad \beta^{(m)}(y,t) = \beta(x(y),t),$$

$\beta_0^{(m)}(y,t) = \beta_0(x(y),t)$, $\psi_0^{(m)}(y,t) = \psi_0(x(y),t) = \psi^{(m)}(y,t) - \gamma^{(m)}(y,t) \frac{\partial u_2^{(m)}(y,t)}{\partial \hat{N}^{(m)}(y,t)}$, $\psi^{(m)}(y,t) = \psi(x(y),t)$, $\gamma^{(m)}(y,t) = \gamma(x(y),t) = \frac{(\hat{\beta}^{(m)}(y,t), \hat{\nu}^{(m)}(y))}{(\hat{N}^{(m)}(y,t), \hat{\nu}^{(m)}(y))}$, $\hat{N}^{(m)}(y,t) = C^{(m)} N^{(m)}(y,t)$, $N^{(m)}(y,t) = N(x(y),t)$ — вектор конормалі, віднесений до матриці $\hat{A}_2^{(m)}(y,t)$.

Далі переконуємося у тому, що за умови, коли $(y,t) \in \bar{S}_2^{(m)} \times [0,T]$, рівняння (45) відносно функції

$$u_2^{(m)}(y,t)\Big|_{y \in \bar{S}_2^{(m)}} = u_2^{(m)}(y', F^{(m)}(y'), t) = \bar{u}_2^{(m)}(y', t),$$

де $F^{(m)}(y')$ визначена формулою (20), приймає вигляд

$$\tilde{L}_{5,(m)} \bar{u}^{(m)} \equiv \sum_{k,l=1}^{n-1} \bar{\tilde{\hat{\beta}}}^{(m)}_{kl}(y',t) D_{kl} \bar{u}_2^{(m)} + \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\tilde{\hat{\beta}}}^{(m)}_{k}(y',t) D_k \bar{u}_2^{(m)} + \bar{\beta}_0^{(m)}(y',t) \bar{u}_2^{(m)} -$$

$$D_t \bar{u}_2^{(m)} = \bar{\psi}_0^{(m)}(y',t), \qquad (y',t) \in S_{2,0}^{(m)} \times (0,T]. \tag{46}$$

У рівнянні (46) $\bar{\beta}_0^{(m)}(y',t) = \beta_0^{(m)}(y', F^{(m)}(y'), t)$, а $\bar{\tilde{\hat{\beta}}}^{(m)}_{kl}(y',t) = \tilde{\hat{\beta}}^{(m)}_{kl}(y', F^{(m)}(y'), t)$, $\bar{\tilde{\hat{\beta}}}^{(m)}_{k}(y',t) = \tilde{\hat{\beta}}^{(m)}_{k}(y', F^{(m)}(y'), t)$, $k,l = 1,\dots,n-1$, визначаються з рівностей (37), які віднесені до місцевої системи координат $\{y, t\}$.

Як і в у випадку елементарної поверхні визначимо функцію

$$\hat{\Gamma}_m(y,t;\eta,\tau) = \bar{\hat{P}}_m(y',t;\eta',\tau) \bar{\hat{\nu}}_n^{(m)}(\eta'), \qquad 0 \le \tau < t \le T, \quad y', \eta' \in \bar{S}_{2,0}^{(m)},$$

де функція $\bar{\hat{P}}_m(y',t;\eta',\tau)$ — ф.р. рівномірно параболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\sum_{k,l=1}^{n-1} \bar{\tilde{\hat{\beta}}}^{(m)}_{kl}(\eta',\tau) D_{kl} \bar{u}_2^{(m)}(y',t) - D_t \bar{u}_2^{(m)}(y',t) = 0.$$

Далі повертаємося до координат $\{x,t\}$ і записуємо функцію $\hat{\Gamma}_m(y,t;\eta,\tau)$ у цих змінних:

$$\Gamma_m(x,t;\xi,\tau) = P_m(x,t;\xi,\tau)\hat{\nu}_n^{(m)}(\eta(\xi)). \tag{47}$$

Нарешті визначимо функцію

$$\Gamma_0(x,t;\xi,\tau) = \sum_{m=1}^{N} \omega^{(m)}(x)\Gamma_m(x,t;\xi,\tau)\alpha^{(m)}(\xi),$$

де N — число фіксованих точок $x^{(1)},\dots,x^{(N)}$ на поверхні S, в яких задаються локальні координати, а функції $\omega^{(m)}$, $\alpha^{(m)}$, Γ_m визначені за допомогою співвідношень (18), (19) та (47) відповідно.

Побудовану таким чином функцію Γ_0 вважаємо головною частиною ф.р. Γ рівняння (36), який, як і в попередньому випадку, шукаємо методом Леві. Побудову ф.р. Γ рівняння (36) завершено.

Використовуючи ф.р. Γ, єдиний розв'язок задачі (36), (40) можна представити у вигляді

$$u_2(x,t) = \int\limits_S \Gamma(x,t;\xi,0)\varphi_2(\xi)d\sigma_\xi - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \Gamma(x,t;\xi,\tau)\psi_0(\xi,\tau)d\sigma_\xi, \quad (x,t)\in\Sigma. \tag{48}$$

Отже, маємо два вирази для значень функції u_2 на Σ: співвідношення (33), де треба покласти $s=2$, $(x,t)\in\Sigma$, та співвідношення (48). Якщо прирівняти між собою їх праві частини, враховуючи при цьому (7), (9), (37) та (38), то знайдемо перше рівняння, що пов'язує невідомі функції V_m, $m=0,1,2$:

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^{(0)}} G_0(x,t;\xi,\tau)V_0(\xi,\tau)d\sigma_\xi + \sum_{l=0}^{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^{(l)}} K_{0l}(x,t;\xi,\tau)V_l(\xi,\tau)d\sigma_\xi = \Phi_0(x,t),$$

$$(x,t)\in\Sigma^{(0)}, \tag{49}$$

де $\Sigma^{(0)} = S^{(0)}\times[0,T]$, $S^{(0)}=S$, $S^{(1)}=S^{(2)}=S_1$,

$$G_0(x,t;\xi,\tau)\equiv G_2(x,t;\xi,\tau), \qquad K_{01}(x,t;\xi,\tau)\equiv 0,$$

$$K_{00}(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2}\gamma(\xi,\tau)\Gamma(x,t;\xi,\tau) - \int\limits_\tau^t ds \int\limits_S \Gamma(x,t;\eta,s)\gamma(\eta,s)\frac{\partial G_2(\eta,s;\xi,\tau)}{\partial N(\eta,s)}\,d\sigma_\eta,$$

$$K_{02}(x,t;\xi,\tau) = G_2(x,t;\xi,\tau) - \int\limits_\tau^t ds \int\limits_S \Gamma(x,t;\eta,s)\gamma(\eta,s)\frac{\partial G_2(\eta,s;\xi,\tau)}{\partial N(\eta,s)}\,d\sigma_\eta,$$

$$\Phi_0(x,t) = \int\limits_S \Gamma(x,t;\xi,0)\varphi_2(\xi)d\sigma_\xi - \sum_{j=2}^{3} u_2^{(j)}(x,t) -$$

$$\int_0^t d\tau \int_S \Gamma(x,t;\xi,\tau)\left[\psi(\xi,\tau) - \gamma(\xi,\tau)\sum_{j=2}^{3}\frac{\partial u_2^{(j)}(\xi,\tau)}{\partial N(\xi,\tau)}\right] d\sigma_\xi. \tag{50}$$

Друге і третє рівняння для V_m, $m = 0,1,2$, отримаємо з умови спряження (26). Як і у випадку крайової умови, перетворимо рівність (26), виділивши в ній у виразах, що містять похідні першого порядку за просторовими змінними, окремо тангенціальну і конормальну складові за допомогою співвідношень:

$$(\beta^{(1)},\nabla u_2) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i^{(1)}(x,t)\tilde{\delta}_i^{(2)}u_2 + \gamma_2(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial N^{(2)}(x,t)},$$

$$(\alpha,\nabla u_1) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x,t)\tilde{\delta}_i^{(1)}u_1 + \gamma_1(x,t)\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial N^{(1)}(x,t)}, \tag{51}$$

де $\tilde{\delta}_i^{(s)} = D_i - \frac{\nu_i^{(1)}}{(N^{(s)},\nu^{(1)})}\sum_{k=1}^{n} N_k^{(s)}D_k$, $i = 1,\ldots,n$, $s = 1,2$, — дотичні диференціальні оператори на S_1,

$$\gamma_1(x,t) = \frac{(\alpha(x,t),\nu^{(1)}(x))}{(N^{(1)}(x,t),\nu^{(1)}(x))}, \qquad \gamma_2(x,t) = \frac{(\beta^{(1)}(x,t),\nu^{(1)}(x))}{(N^{(2)}(x,t),\nu^{(1)}(x))}.$$

Враховуючи (51) та (25), умову спряження (26) можна переписати у вигляді:

$$\tilde{L}_4u(x,t) \equiv \sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}^{(1)}(x,t)\delta_i^{(1)}\delta_j^{(1)}u_2 + \sum_{i=1}^{n}\beta_i^{(1)}(x,t)\tilde{\delta}_i^{(2)}u_2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x,t)\tilde{\delta}_i^{(1)}u_2 +$$

$$\tilde{\beta}_0^{(1)}(x,t)u_2 - D_tu_2 = \tilde{\theta}(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma_1\backslash S_1, \tag{52}$$

або

$$\tilde{L}_4u(x,t) \equiv \sum_{k,l=1}^{n}\tilde{\beta}_{kl}^{(1)}(x,t)D_{kl}u_2 + \sum_{k=1}^{n}\tilde{\beta}_k^{(1)}(x,t)D_ku_2 + \tilde{\beta}_0^{(1)}(x,t)u_2 - D_tu_2 = \tilde{\theta}(x,t), \tag{53}$$

де

$$\tilde{\beta}_{kl}^{(1)}(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}^{(1)}(x,t)\tau_{ik}^{(1)}(x)\tau_{jl}^{(1)}(x), \quad k,l = 1,\ldots,n,$$

$$\tilde{\beta}_0^{(1)}(x,t) = \beta_0^{(1)}(x,t) + \alpha_0(x,t),$$

$$\tilde{\beta}_k^{(1)}(x,t) = \beta_k^{(1)}(x,t) - \alpha_k(x,t) + \sum_{s=1}^{2}(-1)^{s-1}\gamma_s(x,t)N_k^{(s)}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}^{(1)}(x,t)\delta_i(\nu_j^{(1)}(x)\nu_k^{(1)}(x)),$$

$$\tilde{\theta}(x,t) = \theta_0(x,t) + \sum_{s=1}^{2}(-1)^{s-1}\gamma_s(x,t)\frac{\partial u_s(x,t)}{\partial N^{(s)}(x,t)},$$

$$\theta_0(x,t) = \theta(x,t) - \alpha_0(x,t)z(x,t) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x,t)\tilde{\delta}_i^{(1)}(x,t)z(x,t). \tag{54}$$

Міркуючи як і у випадку крайової умови, розглядатимемо (52) або (53) як автономне параболічне рівняння на $\Sigma_1 \backslash S_1$. У цьому рівнянні, як випливає з умов теореми, умови (34), формул (54) та властивостей потенціалів (див. п. 2), його коефіцієнти та права частина належать до класу $H^{\lambda,\lambda/2}$. Тоді для розв'язку u_2 цього рівняння, який задовольняє початкову умову

$$u_2(x,0) = \varphi_2(x), \qquad x \in S_1, \tag{55}$$

справедлива нерівність

$$\|u_2\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1)} \leq C\left[\|\tilde{\theta}\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)} + \|\varphi_2\|_{H^{2+\lambda}(S_1)}\right]. \tag{56}$$

Розв'язок задачі (53), (55) можна представити у вигляді

$$u_2(x,t) = \int\limits_{S_1} \Gamma_1(x,t;\xi,0)\varphi_2(\xi)d\sigma_\xi - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_1} \Gamma_1(x,t;\xi,\tau)\tilde{\theta}(\xi,\tau)d\sigma_\xi, \quad (x,t) \in \Sigma_1, \tag{57}$$

де $\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)$ — ф.р. оператора $\tilde{L}_4$, існування якого забезпечують умови теореми.

Як і в попередньому випадку, маємо два вирази для значень функції u_2 на Σ_1: співвідношення (33), де треба покласти $s = 2$, $(x,t) \in \Sigma_1$, та співвідношення (57). Прирівнюючи між собою їх праві частини, враховуючи при цьому (6)–(8), знаходимо друге рівняння, що пов'язує невідомі функції V_m, $m = 0,1,2$. Третє рівняння для V_m отримаємо, використовуючи (57) та умову спряження (25). Тоді система рівнянь відносно невідомих щільностей V_m, $m = 0,1,2$, матиме вигляд:

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^{(m)}} G_m(x,t;\xi,\tau)V_m(\xi,\tau)d\sigma_\xi + \sum_{l=0}^{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^{(l)}} K_{ml}(x,t;\xi,\tau)V_l(\xi,\tau)d\sigma_\xi = \Phi_m(x,t),$$

$$(x,t) \in \Sigma^{(m)}, \quad m = 0,1,2, \tag{58}$$

де $\Sigma^{(m)} = S^{(m)} \times [0,T]$, $m = 0,1,2$.

$$K_{10}(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_\tau^t ds \int\limits_{S_1} \Gamma_1(x,t;\eta,s)\gamma_2(\eta,s)\frac{\partial G_2(\eta,s;\xi,\tau)}{\partial N^{(2)}(\eta,s)}\, d\sigma_\eta,$$

$$K_{20}(x,t;\xi,\tau) = K_{10}(x,t;\xi,\tau) + G_2(x,t;\xi,\tau),$$

$$K_{ml}(x,t;\xi,\tau) = (-1)^{l-1}\frac{1}{2}\,\gamma_l(\xi,\tau)\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)+$$

$$\int\limits_\tau^t ds \int\limits_{S_1} \Gamma_1(x,t;\eta,s)\gamma_l(\eta,s)\frac{\partial G_l(\eta,s;\xi,\tau)}{\partial N^{(l)}(\eta,s)}\, d\sigma_\eta, \qquad m,l = 1,2,$$

$$\Phi_m(x,t) = \int\limits_{S_1} \Gamma_1(x,t;\xi,0)\varphi_2(\xi)d\sigma_\xi - \sum_{l=2}^{3} u_m^{(l)}(x,t) + z_m(x,t) -$$

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_1} \Gamma_1(x,t;\xi,\tau) \left[\theta_0(\xi,\tau) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=2}^{3}(-1)^{i-1}\gamma_i(\xi,\tau)\frac{\partial u_i^{(j)}(\xi,\tau)}{\partial N^{(i)}(\xi,\tau)}\right] d\sigma_\xi, \qquad m=1,2,$$

$$z_1(x,t)\equiv z(x,t), \qquad z_2(x,t)\equiv 0, \tag{59}$$

а K_{0m}, $S^{(m)}$, $m=0,1,2$, Φ_0 визначають за формулами (50).

При цьому для ядер K_{ml}, $m,l=0,1,2$, з (50) та (59) є правильною нерівність (4), в якій замість n, r і p треба покласти відповідно $n-1$, 0 і 0, а для функцій Φ_m, $m=0,1,2$, як випливає з припущень теореми, умов узгодження (30) та властивостей потенціалів, виконується умова

$$\Phi_m \in \underset{\circ}{H}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma^{(m)}), \qquad m=0,1,2.$$

Система рівнянь (58) є системою інтегральних рівнянь Вольтерри I роду. На підставі (22), леми 3.2 та умов теореми переконуємося в тому, що після застосування оператора $\mathcal{E}_m$, $m=0,1,2$, до відповідного рівняння системи (58) остання замінюється еквівалентною системою інтегральних рівнянь Вольтерри II роду вигляду ($(x,t)\in\Sigma^{(m)}$, $m=0,1,2$):

$$V_m(x,t) + \sum_{l=0}^{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^{(l)}} R_{ml}(x,t;\xi,\tau)V_l(\xi,\tau)d\sigma_\xi = \Psi_m(x,t), \quad m=0,1,2, \tag{60}$$

де

$$\Psi_m(x,t) = \left(A_m(x,t)\nu^{(m)}(x),\nu^{(m)}(x)\right)^{-1/2}\mathcal{E}_m(x,t)\Phi_m,$$

$$A_0(x,t)\equiv A_2(x,t), \qquad \nu^{(0)}(x)=\nu(x), \qquad \nu^{(1)}(x)=\nu^{(2)}(x),$$

до того ж $\mathcal{E}_m\Phi_m \in \underset{\circ}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\Sigma^{(m)})$, $\Phi_m \in \underset{\circ}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma^{(m)})$, а для ядер R_{ml}, $m,l=0,1,2$, справедлива нерівність (10).

Розв'язуючи систему рівнянь (60) методом послідовних наближень знаходимо V_m, $m=0,1,2$. Крім цього, доводимо, що для V_m, $m=0,1,2$, виконується умова (34).

Для завершення доведення теореми, залишилося перевірити виконання умови (31), оцінки (32) та обґрунтувати єдиність побудованого розв'язку задачі (23)–(27). Для цього достатньо зауважити, що кожну з побудованих за формулами (33), (60) функцій u_s, $s=1,2$, можна розглядати як розв'язок наступної параболічної першої крайової задачі:

$$L_s u_s(x,t) = -f_s(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega_s, \qquad s=1,2,$$

$$u_s(x,0)=\varphi_s(x), \qquad x\in\mathcal{D}_s, \qquad s=1,2,$$

$$u_s(x,t)=v_1(x,t)+(2-s)z(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma_1, \qquad s=1,2,$$

$$u_2(x,t)=v(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma, \tag{61}$$

при виконанні умов узгодження

$$\varphi_s(x)=v_1(x,0)+(2-s)z(x,0), \qquad x\in S_1, \qquad s=1,2,$$

$$\varphi_2(x) = v(x,0), \qquad x \in S,$$
$$\left.\frac{\partial u_s(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} + (2-s)\left.\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}, \quad x \in S_1, \qquad s = 1,2,$$
$$\left.\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}, \quad x \in S, \tag{62}$$

де функції $v_1 \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1)$ та $v \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma)$ визначені за допомогою співвідношень (57) і (48) відповідно. Тоді (див. [6]) умови теореми разом з умовами (30), оцінками (56) та (41) гарантують нам існування єдиного розв'язку задачі (61), (62), що належить до класу (31), і для якого справедлива оцінка (32). Теорема доведена. □

Література

1. Апушкинская Е.А., Назаров А.И. *Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений* // РАН, Алгебра и анализ. – 1994. – 6, вып. 6. – С. 1–29.
2. Бадерко Е.А. *О решении первой краевой задачи для параболического уравнения с помощью потенциала простого слоя* // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 283, №1. – С. 11–13.
3. Вентцель А.Д. *О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов* // Теория вероятн. и ее применения. – 1959. – 4, №2. – С. 172–185.
4. Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д. Параболические граничные задачи. – Кишенев: Штиница, 1992. — 328 с.
5. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. — Киев: Вища школа, 1990. — 200 с.
6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М. : Наука, 1967. — 736 с.
7. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. — Чернівці: Прут, 2003. — 248 с.
8. Портенко М.І. Процеси дифузії в середовищах з мембранами. — Інститут математики НАН України. Київ, 1995. — 199 с.
9. Солонников В.А. *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида* // Труды Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1965. №83. С. 3–162.
10. Цаповська Ж.Я. *Розв'язання методом потенціалів параболічної початково-крайової задачі з оператором типу Вентцеля в умові спряження* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, №2. – С.39–46.
11. Копитко Б.І., Цаповська Ж.Я. *Початково-крайова задача з умовою спряження типу Вентцеля для параболічного рівняння з розривними коефіцієнтами* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, №1. – С. 7–16.
12. Кічура С., Цаповська Ж. *Класична розв'язність однієї крайової задачі для параболічного рівняння з розривними коефіцієнтами* // Математичний вісник НТШ. – 2009. – Т. 6. – С. 140–154.
13. Цаповська Ж.Я. *Параболічна початково-крайова задача з умовою спряження типу Вентцеля та конормальною похідною в крайовій умові* // Мат. Студії. – 2010. – Т. 33, № 1. – С. 107–112.
14. Черепова М.Ф. *Решение методом потенциала I-ой краевой задачи для параболического уравнения 2-го порядка в нецилиндрической области* // М.: 1985. – Деп. в ВИНИТИ 11.01.85. – № 361-85 Деп.

15. Yi Zeng and Yousong Luo. *Linear Parabolic Equations with Ventsel Initial Boundary Conditions,* Bull. Austral. Math. Soc., **51**(1995), 465–479.

Львівський національний університет ім. І. Франка,
Львів, Україна

Надійшло 18.11.2010

Kopytko B.I., Mylyo O.Ya., Tsapovska Zh.Ya. *A parabolic conjugation problem with general boundary condition and a conjugation condition of Wentzel type*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 55–73.

We consider the question of existence in Hölder class of a solution of an initial-boundary problem for linear parabolic second-degree equation with discontinuous coefficients with a boundary condition and a conjugation condition which are defined by linear parabolic second-degree operators as well as equation in the domain.

Копытко Б.И., Мыле О.Я., Цаповская Ж.Я. *Параболическая задача сопряжения с общим краевым условием и условием сопряжения типа Вентцеля* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 55–73.

В статье рассматривается вопрос о существовании в классе Гельдера решения начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами с краевым условием и условием сопряжения, которые, как и уравнение в области, определяются линейными параболическими операторами второго порядка.