

УДК 517.948:517.946

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А.

ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛОГІВ ДВОСТОРОННІХ МЕТОДІВ КУРПЕЛЯ ДО ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Застосування аналогів двосторонніх методів Курпеля до звичайних диференціальних рівнянь* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 48–54.

Побудовано і досліджено аналоги двосторонніх методів Курпеля наближеного розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, які дозволяють отримувати надлінійну збіжність у випадку недиференційовної правої частини.

ВСТУП

Застосування двосторонніх наближених методів на практиці часто утруднене через те, що в теорії двосторонніх монотонних методів фігурують вимоги про монотонність та про опуклість операторів у відповідних рівняннях. Істотний вклад М.С. Курпеля в теорію двосторонніх методів стосується побудови таких нових двосторонніх методів, обґрунтування яких не потребує монотонності і опуклості правих частин вихідних рівнянь. Двосторонні методи Курпеля зберігають найважливіші властивості методу Чаплигіна (див. [2, 3]). В [7] започатковано ідею врахування збурень у правих частинах лінеаризованих доданків методів Курпеля і Чаплигіна таким способом, що запропоновані алгоритми окреслюють також і стратегію врахування похибок заокруглення зі збереженням двосторонньої монотонності апроксимації розв'язку рівняння і квадратичної швидкості збіжності ітерацій до розв'язку. У цьому повідомленні досліджені аналоги двосторонніх методів Курпеля у застосуванні до задачі Коші

$$x'(t) = g(t, x(t)) - h(t, x(t)), \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Основна ідея запропонованих алгоритмів полягає у поширенні зініційованого М.С. Курпелем в [3] підходу до рівняння (1) таким способом, щоб вони були застосовними до рівняння вигляду (1) з неопуклою правою частиною, яка не обов'язково є диференційовною.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 34A45.

Ключові слова і фрази: двосторонні методи, часткова ліпшицієвість, неперервна диференційовність.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В задачі (1), (2) будемо вважати $g(t, x(t)), h(t, x(t))$ дійсними неперервними функціями при $t \in [t_0, T]$, $x \in S(x_0, M) = \{x \mid |x - x_0| \leq M, x \in R^1\}$ (R^1 — множина дійсних чисел). Шукатимемо розв'язок задачі (1), (2) у класі неперервно диференційовних на $[t_0, T]$ функцій.

Умовою B_1 назвемо припущення про існування таких неперервних при $t \in [t_0, T]$, $y, z \in S(x_0, M)$ функцій $a_1(t, y, z)$, $\alpha_1(t, y, z)$, $b_1(t, y, z)$, $\beta_1(t, y, z)$, для яких із співвідношень $t \in [t_0, T]$, $y, z \in S(x_0, M)$ випливає:

$$(a_1(t, y, z) + \alpha_1(t, y, z))(z - y) \leq g(t, z) - g(t, y), \quad (3)$$

$$(b_1(t, y, z) + \beta_1(t, y, z))(z - y) \leq h(t, z) - h(t, y).$$

При цьому функції $a_1(t, y, z)$, $\alpha_1(t, y, z)$, $b_1(t, y, z)$, $\beta_1(t, y, z)$ не спадають по y , не зростають по z і $a_1(t, y, z) \geq 0$, $\alpha_1(t, y, z) \geq 0$, $b_1(t, y, z) \geq 0$, $\beta_1(t, y, z) \geq 0$.

Умову (3) будемо називати частковою ліпшицієвістю. Вважатимемо заданими неперервно диференційовні функції $u(t), v(t)$, для яких

$$u(t_0) \leq x_0 \leq v(t_0) \quad (t \in [t_0, T]), \quad (4)$$

$$u(t) \leq v(t), \quad (5)$$

$$u'(t) \leq g(t, u(t)) - h(t, v(t)), \quad (6)$$

$$v'(t) \geq g(t, v(t)) - h(t, u(t)) \quad (t \in [t_0, T]),$$

причому $u(t), v(t) \in S(x_0, M)$ при $t \in [t_0, T]$. Позначатимемо $[u(t), v(t)] = \{x(t) \mid u(t) \leq x(t) \leq v(t)\}$. Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$y_0(t) = u(t), z_0(t) = v(t) \quad (7)$$

$$y'_{n+1}(t) = a_1(t, y_n(t), z_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) - b_1(t, y_n(t), z_n(t))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) + g(t, y_n(t)) - h(t, z_n(t)), \quad (8)$$

$$z'_{n+1}(t) = (a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + \alpha_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_{n+1}(t) - z_n(t)) - (b_1(t, y_n(t), z_n(t)) + \beta_1(t, y_n(t), z_n(t)))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) + g(t, z_n(t)) - h(t, y_n(t)),$$

$$y_{n+1}(t_0) = z_{n+1}(t_0) = x_0. \quad (9)$$

Теорема 1. Нехай справджується умова B_1 і задані функції $u(t), v(t)$ задовольняють співвідношення (4)–(6). Тоді для ітераційного процесу (7)–(9) мають місце співвідношення

$$y_n(t) \leq y_{n+1}(t) \leq z_{n+1}(t) \leq z_n(t), \quad (10)$$

де $n = 0, 1, \dots, t \in [t_0, T]$

Доведення. Формули (7) і нерівність (5) означають, що $y_0(t) \leq z_0(t)$. Із (6) та (8) для $n = 0$ випливає, що

$$\begin{aligned} y_1'(t) - y_0'(t) &\geq a_1(t, y_0(t), z_0(t))(y_1(t) - y_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t))(z_0(t) - z_1(t)), \\ z_0'(t) - z_1'(t) &\geq (a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_0(t) - z_1(t)) + (b_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \\ &\quad \beta_1(t, y_0(t), z_0(t)))(y_1(t) - y_0(t)). \end{aligned}$$

Звідси за теоремою про диференціальні нерівності [2] маємо, що при $t \in [t_0, T]$

$$y_1(t) \geq y_0(t), \quad z_1(t) \leq z_0(t).$$

Крім того, з (8) та (3) випливає

$$\begin{aligned} z_1'(t) - y_1'(t) &= (a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_1(t) - y_1(t)) - \\ &\quad (a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_0(t) - y_0(t)) - \\ &\quad \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t))(z_0(t) - z_1(t)) - \beta_1(t, y_0(t), z_0(t))(y_1(t) - y_0(t)) + g(t, z_0(t)) - \\ &\quad g(t, y_0(t)) + h(t, z_0(t)) - h(t, y_0(t)) \geq \\ &(a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \beta_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_1(t) - y_1(t)) + \\ &\quad \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t))(y_1 - y_0) + \beta_1(t, y_0(t), z_0(t))(z_0(t) - z_1(t)) \geq \\ &\quad (a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \\ &\quad \beta_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_1(t) - y_1(t)). \end{aligned}$$

Знову скориставшись теоремою про диференціальні нерівності, робимо висновок, що при $t \in [t_0, T]$

$$y_1(t) \leq z_1(t).$$

Отже, співвідношення (10) доведені для $n = 0$. Припускаючи їх справедливість при $n = k - 1$, при $n = k$ із (8), (9) та умови B_1 маємо:

$$\begin{aligned} y_{k+1}'(t) - y_k'(t) &= g(t, y_k(t)) - g(t, y_{k-1}(t)) + h(t, z_{k-1}(t)) - h(t, z_k(t)) + \\ &\quad a_1(t, y_k(t), z_k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + b_1(t, y_k(t), z_k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t)) - \\ &\quad a_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))(y_k(t) - y_{k-1}(t)) - b_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))(z_{k-1}(t) - z_k(t)) \geq \\ &\quad a_1(t, y_{k-1}(t), y_k(t)) + \alpha_1(t, y_{k-1}(t), y_k(t))(y_k(t) - y_{k-1}(t)) + \\ &\quad b_1(t, z_k(t), z_{k-1}(t)) + \beta_1(t, z_k(t), z_{k-1}(t))(z_{k-1}(t) - z_k(t)) + \\ &\quad a_1(t, y_k(t), z_k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + b_1(t, y_k(t), z_k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t)) - \\ &\quad a_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))(y_k(t) - y_{k-1}(t)) - b_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))(z_{k-1}(t) - z_k(t)) \geq \\ &\quad a_1(t, y_k(t), z_k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + b_1(t, y_k(t), z_k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t)), \\ z_k'(t) - z_{k+1}'(t) &= g(t, z_{n-1}(t)) - g(t, z_n(t)) + h(t, y_n(t)) - h(t, y_{n-1}(t)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \alpha_1(t, y_k(t), z_k(t)))(z_k(t) - z_{k+1}(t)) + \\ & (b_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \beta_1(t, y_k(t), z_k(t)))(y_{k+1}(t) - y_k(t)) - \\ & (a_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t)) + \alpha_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t)))(z_{k-1}(t) - z_k(t)) - \\ & (b_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t)) + \beta_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t)))(y_k(t) - y_{k-1}(t)) \geq \\ & (a_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \alpha_1(t, y_k(t), z_k(t)))(z_k(t) - z_{k+1}(t)) + \\ & (b_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \beta_1(t, y_k(t), z_k(t)))(y_{k+1}(t) - y_k(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_{k+1}(t) - y'_{k+1}(t) &= g(t, z_n(t)) - g(t, y_n(t)) + h(t, z_n(t)) - h(t, y_n(t)) - \\ & \alpha_1(t, y_k(t), z_k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t)) - \beta_1(t, y_k(t), z_k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + \\ & (a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) - \\ & (a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_n(t) - y_n(t)) \geq \\ & (a_1(t, y_k(t), z_k(t)) + b_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \alpha_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \\ & \beta_1(t, y_k(t), z_k(t)))(z_{k+1}(t) - y_{k+1}(t)). \end{aligned}$$

З отриманих співвідношень, враховуючи теорему про диференціальні нерівності, одержуємо, що

$$y_{k+1}(t) - y_k(t) \geq 0, \quad z_k(t) - z_{k+1}(t) \geq 0, \quad z_{k+1}(t) - y_{k+1}(t) \geq 0.$$

Це означає, що нерівності (10) виконуються і при $n = k$. Згідно з принципом математичної індукції, теорему вважаємо доведеною. \square

При виконанні умов теореми можна гарантувати збіжність ітераційного процесу (7)–(9) до неперервно диференційовних компонент $y(t), z(t)$ розв'язку $(y(t), z(t))$ системи рівнянь

$$y'(t) = g(t, y(t)) - h(t, z(t)), \tag{11}$$

$$z'(t) = g(t, z(t)) - h(t, y(t))$$

з початковою умовою

$$y(t_0) = z(t_0) = x_0. \tag{12}$$

Точніше, послідовності $\{y_n(t)\}$ та $\{z_n(t)\}$, утворені за допомогою ітераційного процесу (7)–(9), збігаються рівномірно, монотонно не спадаючи до $y(t)$ та монотонно не зростаючи до $z(t)$ неперервно диференційовних на $[t_0, T]$ компонент розв'язку $(y(t), z(t))$ задачі (11), (12). Це впливає з рівномірної обмеженості і рівностепеневої неперервності послідовностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ та з їх монотонності. Однак умови теореми не забезпечують, взагалі кажучи, збіжності кожної з цих послідовностей або однієї з них до розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 2. Нехай справджуються умови теореми (1) і, крім того, задача (11), (12) має єдиний неперервно диференційовний на $[t_0, T]$ розв'язок $(y(t), z(t))$. Тоді для єдиного неперервно диференційовного на $[t_0, T]$ розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2) та послідовностей $\{y_n(t)\}$ та $\{z_n(t)\}$, утворених за допомогою формул (7)–(9), при $n = 0, 1, \dots, t \in [t_0, T]$ мають місце співвідношення

$$y_n(t) \leq y_{n+1}(t) \leq x(t) \leq z_{n+1}(t) \leq z_n(t),$$

причому ці послідовності рівномірно збігаються до $x(t)$ на $[t_0, T]$, відповідно не спадаючи та не зростаючи.

Доведення. Оскільки $(y(t), z(t))$ є розв'язками задачі (11), (12) і розв'язком цієї задачі є також пара $(x(t), x(t))$, то з попереднього зауваження і з існування розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2) випливає, що $y(t) = z(t) = x(t)$. Тому можна вважати теорему доведеною. \square

Для отримання оцінок збіжності процесу (7)–(9) умов попередніх двох теорем, зокрема, часткової ліпшицієвості (3) правої частини рівняння (1) недостатньо.

Умовою B_2 назвемо припущення про те, що при $t \in [t_0, T]$, $y \leq z$, $y, z \in S(x_0, M)$ справджуються нерівності

$$g(t, z) - g(t, y) \leq (\alpha_1(t, y, z) + \alpha_2(t, y, z))(z - y),$$

$$h(t, z) - h(t, y) \leq (\beta_1(t, y, z) + \beta_2(t, y, z))(z - y)$$

з тими ж самими функціями $\alpha_1(t, y, z)$, $\beta_1(t, y, z)$, які фігурують в умові B_1 й неперервними невід'ємними функціями $\alpha_2(t, y, z)$, $\beta_2(t, y, z)$.

Теорема 3. Нехай виконуються умови B_1 та B_2 і функції $y_n(t)$, $z_n(t)$ при $n = 0, 1, \dots$ задовольняють співвідношення (7)–(9). Тоді при $n = 0, 1, \dots, t \in [t_0, T]$ мають місце оцінки

$$z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) \leq f_n^{(2)}(t)(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + f_n^{(1)}(t)(z_n(t) - y_n(t)), \quad (13)$$

та

$$z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t) \leq \int_{t_0}^t f_n^{(1)}(s) \exp \int_s^t f_n^{(2)}(\xi) d\xi (z_n(s) - y_n(s)) ds, \quad (14)$$

де

$$f_n^{(1)}(t) = \alpha_2(t, y_n(t), z_n(t)) + \beta_2(t, y_n(t), z_n(t)), \quad (15)$$

$$f_n^{(2)}(t) = \alpha_1(t, y_n(t), z_n(t)) + \beta_1(t, y_n(t), z_n(t))$$

Доведення. Із (7)–(10) та з умови B_2 випливає, що

$$\begin{aligned} z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) &= g(t, z_n(t)) - g(t, y_n(t)) + h(t, z_n(t)) - h(t, y_n(t)) - \\ &\alpha_1(t, y_n(t), z_n(t))(z_n(t) - z_{n+1}(t)) - \beta_1(t, y_n(t), z_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) + \\ &(a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) - \\ &(a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_n(t) - y_n(t)) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + \alpha_2(t, y_n(t), z_n(t))(z_n(t) - y_n(t)) + \\ & (b_1(t, y_n(t), z_n(t)) + \beta_2(t, y_n(t), z_n(t)))(z_n(t) - y_n(t)) + \\ & (a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) - \\ & (a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_n(t) - y_n(t)) = \\ & f_n^{(2)}(t)(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + f_n^{(1)}(t)(z_n(t) - y_n(t)), \end{aligned}$$

тобто маємо оцінку (13). Оцінка (14) впливає з (13), якщо скористатись теоремою про диференціальні нерівності [6]. \square

Зауваження 1.1. Характер збіжності процесу (7)–(9) визначається структурою функцій $a_1(t, y, z)$, $b_1(t, y, z)$, $\alpha_2(t, y, z)$, $\beta_2(t, y, z)$. Якщо, зокрема,

$$\alpha_2(t, y, z) = \alpha_3(t, y, z)(z - y)^\gamma, \quad \beta_2(t, y, z) = \beta_3(t, y, z)(z - y)^\gamma \quad (\gamma \geq 0),$$

де $\alpha_3(t, y, z)$, $\beta_3(t, y, z)$ неперервні невід’ємні при $t \in [t_0, T]$, $y \leq z$, $y, z \in S(x_0, M)$, то згідно з (14),

$$f_n^{(1)}(t) = (\alpha_3(t, y(t), z(t)) + \beta_3(t, y(t), z(t)))(z_n(t) - y_n(t))^\gamma. \quad (16)$$

Підставляючи (15) в (14), при $\gamma > 0$ для ітераційного процесу (7)–(9) отримуємо надлінійну збіжність, а при $\gamma = 1$ та $\gamma > 1$ ітераційний процес (7)–(9) характеризується квадратичною і, відповідно, надквадратичною збіжністю. У тому випадку, коли

$$a_1(t, y, z) = \frac{\partial g(t, y)}{\partial y}, \quad b_1(t, y, z) = \frac{\partial h(t, y)}{\partial y},$$

$$\alpha_2(t, y, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, y)}{\partial y^2} (z - y), \quad \beta_2(t, y, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(t, y)}{\partial y^2} (z - y),$$

матимемо квадратичну збіжність при $\gamma = 1$, і отримані результати охоплюють відповідні результати М.С. Курпеля із [2, 3]. Якщо, крім того, одна із функцій $g(t, x)$ або $h(t, x)$ тотожно дорівнює нулю, то результати, які отримуються із наведених теорем, описують основні властивості методу Чаплигіна і багатьох його різновидів.

Зауваження 1.2. Відмінність алгоритму (7)–(9) від алгоритмів М.С. Курпеля з [2, 3] стосується можливості отримати надлінійну збіжність алгоритму для недиференційовних функцій $g(t, x)$ або $h(t, x)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.:Наукова думка, 1981. – 224с.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.– М: Наука, 1977.– 741 с.
3. Курпель М.С. Про деякі модифікації методу С.О. Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь // Доп.АНУРСР. Сер.А. – 1996, №4.– С. 303-306.
4. Маршус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.

5. Обшта А., Шувар Б. *Гіллясті дроби та ітераційні алгоритми для апроксимації коренів поліномів* // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки –2009.– С.294–295.
6. Рисс Ф. Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* – М: ЧЛ, 1954. – 589 с.
7. Рудин У. *Функциональный анализ.* – М: Мир, 1975. – 443 с.
8. Шувар Б.А., Шуляр М.А. *Про нулі полінома із коефіцієнтами із алгебри Банаха* // Вісник Львівського політехнічного інституту. Математика. Механіка. – Т.119 – 1977.
9. Kaczorek T. *Polinomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory*, Springer: Communications and Control Engineering, Dordrecht, 2007 – 503 p.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 06.10.2010

Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. *An application of analogues of two-sided Kurpel's methods to ordinary differential equation*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 48–54.

An analogues of two-sided Kurpel's methods of approximate solution of ordinary differential equation that give possibility to get above-linear convergence in the case of nondifferential right part are constructed and investigated.

Копач М.И., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Применение аналогов двусторонних методов Курпеля к обыкновенным дифференциальным уравнениям* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 48–54.

Построены и исследованы аналоги двусторонних методов Курпеля приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые позволяют получать скорость сходимости выше линейной в случае недифференцируемой правой части.