Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.98

Дмитришин М.І.

ПРОСТОРИ ВЕКТОРІВ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ КОМПЛЕКСНИХ СТЕПЕНІВ ПОЗИТИВНИХ ОПЕРАТОРІВ

Дмитришин М.І. *Простори векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 21–30.

Визначено нові класи інтерполяційних просторів векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів. Досліджено властивості апроксимаційних просторів, породжених розглянутими інтерполяційними просторами. Наведено приклад застосування до регулярних еліптичних граничних задач, в якому вектори експоненціального типу співпадають з кореневими векторами, а для операторів із сталими коефіцієнтами є підкласом цілих функцій експоненціального типу.

Вступ

У даній статті визначено нові класи інтерполяційних просторів векторів експоненціального типу комплексних степенів позитивних операторів і досліджено їхні інтерполяційні властивості, що узагальнюють відповідні результати роботи [5].

Розглянуто апроксимаційні простори, породжені інтерполяційними просторами векторів експоненціального типу, та отримано нерівності, що оцінюють мінімальну відстань від заданого елемента до підпростору векторів експоненціального типу з фіксованим індексом. Зазначимо, що розв'язанню проблеми наближення елементів банахового простору різними класами гладких векторів замкненого оператора, у тому числі векторами експоненціального типу, присвячено роботи [1, 2]. У цьому зв'язку відзначимо також роботу [4], де наведено застосування до згаданої проблеми поняття квазінормованого абстрактного простору Бєсова.

Тут наведено приклад застосування отриманих абстрактних результатів для регулярних еліптичних операторів, вектори експоненціального типу яких співпадають з кореневими векторами, а у випадку сталих коефіцієнтів є підкласом цілих функцій експоненціального типу.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 41A65, 47A57, 47A58, 46E35.
Ключові слова і фрази: вектори експоненціального типу, позитивні оператори, апроксимаційні простори.

1 Інтерполяційні простори векторів експоненціального типу

Розглядаємо позитивний оператор A зі щільною областю визначення $\mathcal{C}^1$ в деякому комплексному банаховому просторі X. Згідно з означенням це значить, що піввісь $(-\infty, 0]$ належить його резольвентній множині та існує таке число $c > 0$, що

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{c}{1+|\lambda|}, \qquad \lambda \in (-\infty, 0].$$

Через $\mathcal{C}^k$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ позначаємо область визначення оператора A^k з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}^k} = \|A^k x\|_X$ $(x \in \mathcal{C}^k)$. При цьому $A^0 = I$ — одиничний оператор і $\mathcal{C}^0 = X$.

Нехай $0 < \theta < 1$ та $1 \leq q \leq \infty$. Слідуючи [10], для пари комплексних банахових просторів $\{X, Y\}$ визначаємо інтерполяційний простір

$$(X,Y)_{\theta,q} = \big\{a \in X+Y : \|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}} < \infty\big\}$$

з нормою

$$\|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \big[t^{-\theta}\mathcal{K}(t,a;X,Y)\big]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & : \ q<\infty, \\ \displaystyle\sup_{0<t<\infty} t^{-\theta}\mathcal{K}(t,a;X,Y) & : \ q=\infty, \end{cases}$$

де $\mathcal{K}(t,a;X,Y) = \inf\limits_{a=x+y}\big(\|x\|_X + t\,\|y\|_Y\big)$, а також інтерполяційний простір $[X,Y]_\theta = \big\{a \in X+Y : \exists\ f(z) \in \mathcal{F}(X,Y),\ f(\theta) = a\big\}$ з нормою $\|a\|_{[X,Y]_\theta} = \inf\limits_{f(\theta)=a}\|f(z)\|_{\mathcal{F}(X,Y)}$, де інфімум беремо по всіх функціях $f \in \mathcal{F}(X,Y)$, таких що $f(\theta) = a$. Через $\mathcal{F}(X,Y)$ вище позначено простір $(X+Y)$-значних аналітичних в $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ функцій, неперервних в замиканні $\overline{S}$ і таких, що мають скінченну норму $\|f\|_{\mathcal{F}(X,Y)} = \max\Big(\sup\limits_t\|f(it)\|_X, \sup\limits_t\|f(1+it)\|_Y\Big)$, $f(it) \in X$, $f(1+it) \in Y$ для всіх $-\infty < t < \infty$.

Нехай $m, k \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$. Відомо (див. [10, § 1.15.1]), що для всіх $\alpha \in \mathbb{C}$ таких, що $-m < \operatorname{Re}\alpha \leq \sigma - m$, $0 < \sigma < k$, і всіх елементів $x \in \big(X, \mathcal{C}^k\big)_{\sigma/k,1}$ визначеним буде оператор

$$A^\alpha_\sigma x = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(k-m-\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha+m-1}A^{k-m}(A+tI)^{-k}x\,dt,$$

що допускає замикання A^α в X, яке не залежить від вибору σ. Область визначення $\mathcal{C}^\alpha$ оператора A^α далі розглядаємо як банахів простір з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha} = \|A^\alpha x\|_X$, $x \in \mathcal{C}^\alpha$. Таким чином, оператор A^α і простір $\mathcal{C}^\alpha$ визначені для всіх чисел $\alpha \in \mathbb{C}$. Оператор A^α — неперервний при $\operatorname{Re}\alpha < 0$ та ізоморфно відображає $\mathcal{C}^\alpha$ на X при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ [10, теорема 1.15.2]. Підпростір $\mathcal{C}^k$ щільний в X [10, лема 1.14.1], а щільність $\mathcal{C}^\alpha$ в X є наслідком вкладень $\mathcal{C}^k \subset \big(X, \mathcal{C}^k\big)_{\sigma/k,1} \subset \mathcal{C}^\alpha \subset X$. Для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ справедливими є рівності $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ і оператор A^β ізоморфно відображає $\mathcal{C}^{\alpha+\beta}$ на $\mathcal{C}^\alpha$ [10, теорема 1.15.2]. Зокрема $\mathcal{C}^{\alpha+\beta} \subset \mathcal{C}^\alpha$, отже, $\mathcal{C}^\infty \subset \bigcap_\beta \mathcal{C}^{\alpha+\beta} \subset \mathcal{C}^\infty$, де $\mathcal{C}^\infty := \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{C}^k$.

Далі для довільного $x \in \mathcal{C}^\infty = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{C}^{\alpha+k}$ покладемо $x_k := A^k x \in \mathcal{C}^\alpha$. Для чисел $1 \leq q \leq \infty$, $\nu > 0$ визначимо простори

$$\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha) = \Big\{x \in \mathcal{C}^\infty : \|x\|_{\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)} = \Big(\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-kq}\|x_k\|^q_{\mathcal{C}^\alpha}\Big)^{1/q} < \infty\Big\},$$

$$\mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^\alpha) = \Big\{x \in \mathcal{C}^\infty : \|x\|_{\mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^\alpha)} = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-k}\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha} < \infty\Big\}.$$

Для $1 \le q < \infty$ і $0 \le \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$ розглянемо також простори

$$\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q} = \Big\{ x \in \mathcal{C}^\infty : \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_+} \nu^{-kq} \|x_k\|^q_{(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}} < \infty \Big\},$$
$$\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\, \mathcal{C}^\beta]_{\theta} = \Big\{ x \in \mathcal{C}^\infty : \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_+} \nu^{-kq} \|x_k\|^q_{[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_{\theta}} < \infty \Big\}$$

з нормами

$$\|x\|_{\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \nu^{-kq} \|x_k\|^q_{(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}} \Big)^{1/q}$$

та

$$\|x\|_{\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_{\theta}} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \nu^{-kq} \|x_k\|^q_{[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_{\theta}} \Big)^{1/q}$$

відповідно.

При $\operatorname{Re}\alpha < 0$ $\mathcal{C}^\alpha = X$ і простір $\mathcal{E}_\infty^\nu(X)$ складається з векторів експоненціального типу ν оператора A, введених в роботі [6]. Тому елементи з $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ розширюють клас просторів векторів такого типу.

Лема 1.1. *Простори $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ — банахові.*

Доведення. Нехай (y_n) — послідовність Коші в $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$, тоді такими ж є послідовності (y_n) та $(A^k y_n)$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$ в $\mathcal{C}^\alpha$ внаслідок неперервності вкладення $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha) \subset \mathcal{C}^\alpha$. Оператор A, як позитивний, має непорожню резольвентну множину. Тому, згідно з [3], $\mathcal{C}^\infty$ — щільний в X і, як наслідок, щільний в $\mathcal{C}^\alpha$. В силу [8, теорема VII.9.7] оператори A^k — замкнені над $\mathcal{C}^\alpha$. Із замкненості A^k та повноти $\mathcal{C}^\alpha$ випливає існування таких $x, y \in \mathcal{C}^\alpha$, що $y_n \to x$ і $A^k y_n \to y$ за нормою $\mathcal{C}^\alpha$ та $y = A^k x$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$. Тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, що $\nu^{-kq}\|A^k y_n\|^q_{\mathcal{C}^\alpha} \le 2^{q-1}\nu^{-kq}\|A^k y_{n_\varepsilon}\|^q_{\mathcal{C}^\alpha} + \varepsilon/2^{k+1}$ для всіх $n \ge n_\varepsilon$ та $k \in \mathbb{Z}_+$. Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо $\nu^{-kq}\|A^k x\|^q_{\mathcal{C}^\alpha} \le 2^{q-1}\nu^{-kq}\|A^k y_{n_\varepsilon}\|^q_{\mathcal{C}^\alpha} + \varepsilon/2^{k+1}$ при $n \ge n_\varepsilon$. Отже, $\|x\|^q_{\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)} \le 2^{q-1}\|y_{n_\varepsilon}\|^q_{\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)} + \varepsilon$, і тому $x \in \mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ та $y_n \to x$ за нормою $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$, що і доводить повноту простору $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$. □

Зазначимо, що при $\nu \le \mu$ маємо неперервні вкладення $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha) \subset \mathcal{E}_q^\mu(\mathcal{C}^\alpha) \subset \mathcal{C}^\alpha$.

Лема 1.2. *Якщо $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$, $(\nu_0 \ne \nu_1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ і $1 \le q$, q_0, $q_1 \le \infty$, то при $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^\theta$*

$$\big(\mathcal{E}_{q_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{q_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\big)_{\theta,q} = \mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \tag{1}$$

а при $1 \le q_0, q_1 < \infty$, таких що $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$

$$\big(\mathcal{E}_{q_0}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{q_1}^{\nu}(\mathcal{C}^\beta)\big)_{\theta,q} = \mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}, \tag{2}$$
$$\big[\mathcal{E}_{q_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{q_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\big]_{\theta} = \mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\,, \tag{3}$$
$$\big[\mathcal{E}_{q_0}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{q_1}^{\nu}(\mathcal{C}^\beta)\big]_{\theta} = \mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\, \mathcal{C}^\beta]_{\theta}. \tag{4}$$

Простори $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$, $\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\, \mathcal{C}^\beta]_\theta$ — банахові.

Доведення. Простір $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ — ізометричний простору послідовностей вигляду $l_q^{\nu,\alpha} = \{\bar{x} := (x_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} : x \in \mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l_q^{\nu,\alpha}} = \|x\|_{\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)}$. Зробимо заміну $\nu = 2^{-\sigma}$, при якій умова $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^\theta$ переходить у рівність $\sigma = (1-\theta)\sigma_0 + \theta\sigma_1$, і використаємо теорему 1.18.2 з [10]. При цьому $\mathcal{K}(t, \bar{x}, l_\infty^{\nu_0,\alpha}, l_\infty^{\nu_1,\alpha}) \sim \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \min(2^{k\sigma_0}, t2^{k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ для $q_0 = q_1 = \infty$ та $\mathcal{K}(t, \bar{x}, l_1^{\nu_0,\alpha}, l_1^{\nu_1,\alpha}) \sim \sum_{k\in\mathbb{N}} \min(2^{k\sigma_0}, t2^{k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ для $q_0 = q_1 = 1$. Нехай $\bar{x} \in (l_\infty^{\nu_0,\alpha}, l_\infty^{\nu_1,\alpha})_{\theta,q}$ і без обмеження загальності $\sigma_0 > \sigma_1$. Підставляючи вирази для $\mathcal{K}$ у формули для норм, з точністю до деякої сталої $c > 0$ отримуємо

$$\|\bar{x}\|^q_{\left(l_\infty^{\nu_0,\alpha}, l_\infty^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta,q}} \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta q j(\sigma_0-\sigma_1)} \sup_k \left[\min(2^{k\sigma_0}, 2^{j(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha}\right]^q \geq$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{qj[\sigma_0(1-\theta)+\sigma_1\theta]}\|x_j\|^q_{\mathcal{C}^\alpha} = c\|\bar{x}\|^q_{l_q^{\nu,\alpha}}.$$

Отже, справедливим є неперервне вкладення $(l_\infty^{\nu_0,\alpha}, l_\infty^{\nu_1,\alpha})_{\theta,q} \subset l_q^{\nu,\alpha}$. Якщо $\bar{x} \in l_q^{\nu,\alpha}$, то з використанням нерівності Гельдера

$$\|\bar{x}\|^q_{\left(l_1^{\nu_0,\alpha}, l_1^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta,q}} \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta q j(\sigma_0-\sigma_1)} \Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \min(2^{k\sigma_0}, 2^{j(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha}\Big]^q \leq$$

$$c\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\sigma q}\|x_k\|^q_{\mathcal{C}^\alpha} = c\|\bar{x}\|^q_{l_q^{\nu,\alpha}}$$

для деякої $c > 0$. Тому справедливим буде неперервне вкладення $l_q^{\nu,\alpha} \subset (l_1^{\nu_0,\alpha}, l_1^{\nu_1,\alpha})_{\theta,q}$. З властивостей інтерполяційних просторів отримуємо $(l_1^{\nu_0,\alpha}, l_1^{\nu_1,\alpha})_{\theta,q} \subset \left(l_{q_0}^{\nu_0,\alpha}, l_{q_1}^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta,q} \subset (l_\infty^{\nu_0,\alpha}, l_\infty^{\nu_1,\alpha})_{\theta,q}$ при $1 \leq q, q_0, q_1 \leq \infty$. В результаті маємо $l_q^{\nu,\alpha} \subset \left(l_{q_0}^{\nu_0,\alpha}, l_{q_1}^{\nu_1,\alpha}\right)_{\theta,q} \subset l_q^{\nu,\alpha}$, і рівність (1) доведена.

Простір $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ ізометрично вкладений в простір послідовностей $l_q^\alpha = \left\{(\xi_k) : \xi_k \in \mathcal{C}^\alpha, \ \|(\xi_k)\|_{l_q^\alpha} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \|\xi_k\|^q_{\mathcal{C}^\alpha}\right)^{1/q} < \infty\right\}$. Відповідну ізометрію позначимо $I\colon \mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha) \ni x \hookrightarrow (\xi_k := \nu^{-k}x_k) \in l_q^\alpha$. K-функціонал інтерполяційного простору $\left(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta\right)_{\theta,q}$ допускає оцінку

$$K(t, I(x), l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta) \leq \inf_{x=x_0+x_1} \left(\|I(x_0)\|_{l_{q_0}^\alpha} + t\|I(x_1)\|_{l_{q_1}^\beta}\right) \leq$$
$$\|I\|_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha} K\left(\frac{t\|I\|_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\to l_{q_1}^\beta}}{\|I\|_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}}, x, \mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\right).$$

Зробивши заміну $\tau = t\|I\|_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\to l_{q_1}^\beta}\|I\|^{-1}_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}$, отримаємо

$$\|I(x)\|_{\left(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta\right)_{\theta,q}} \leq \|I\|_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha} \frac{\|I\|^\theta_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\to l_{q_1}^\beta}}{\|I\|^\theta_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}} \|x\|_{\left(\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\right)_{\theta,q}}.$$

Застосувавши подібні оцінки для оберненого відображення I^{-1}, визначеного на множині значень оператора I, отримуємо

$$\|I(x)\|_{\left(l_{q_0}^\alpha, l_{q_1}^\beta\right)_{\theta,q}} = \|x\|_{\left(\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\right)_{\theta,q}} \quad \text{для всіх} \ \ x \in \left(\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\right)_{\theta,q}.$$

Згідно з означенням простір $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$ — ізометричний простору послідовностей $l_{q,\theta}^{\nu,(\alpha,\beta)}=\big\{\bar{x}:=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}: x\in\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\big\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l_{q,\theta}^{\nu,(\alpha,\beta)}}=\|x\|_{\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}}$. Застосовуючи тепер відомий топологічний ізоморфізм банахових просторів $\big(l_{q_0}^\alpha,l_{q_1}^\beta\big)_{\theta,q}=l_{q,\theta}^{(\alpha,\beta)}$, де $l_{q,\theta}^{(\alpha,\beta)}=\big\{(\xi_k): \xi_k\in(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q},\ \|(\xi_k)\|_{l_{q,\theta}^{(\alpha,\beta)}}=\big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\|\xi_k\|^q_{(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}}\big)^{1/q}<\infty\big\}$, $1/q=(1-\theta)/q_0+\theta/q_1$ [10, теорема 1.18.1], приходимо до рівності (2).

Рівність (3) безпосередньо випливає з (1) і теореми 4.7.2 з [7].

Нехай $x\in[\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)]_\theta$, $f(z)\in\mathcal{F}(\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta))$ і $f(\theta)=x$. Тоді

$$g(z)=\left(\frac{\|I\|_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}}{\|I\|_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\to l_{q_1}^\beta}}\right)^{z-\theta}If(z)\in\mathcal{F}(l_{q_0}^\alpha,l_{q_1}^\beta),\ g(\theta)=Ix.$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned}&\|g(z)\|_{\mathcal{F}(l_{q_0}^\alpha,l_{q_1}^\beta)}\le\|I\|^{(1-\theta)}_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}\|I\|^\theta_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\to l_{q_1}^\beta}\|f(z)\|_{\mathcal{F}(\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta))}\\&\|Ix\|_{[l_{q_0}^\alpha,l_{q_1}^\beta]_\theta}\le\|I\|^{(1-\theta)}_{\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)\to l_{q_0}^\alpha}\|I\|^\theta_{\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)\to l_{q_1}^\beta}\|x\|_{[\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)]_\theta}.\end{aligned}$$

Застосовуючи подібні оцінки для оберненого відображення I^{-1}, отримуємо

$$\|I(x)\|_{[l_{q_0}^\alpha,l_{q_1}^\beta]_\theta}=\|x\|_{[\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)]_\theta}\ \ \text{для всіх}\ \ x\in[\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)]_\theta.$$

За означенням простір $\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta$ — ізометричний простору послідовностей $l_{q,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]}=\big\{\bar{x}:=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}: x\in\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta\big\}$ з нормою $\|\bar{x}\|_{l_{q,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]}}=\|x\|_{\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta}$. Тому рівність (4) випливає з відомого топологічного ізоморфізму $\big[l_{q_0}^\alpha,l_{q_1}^\beta\big]_\theta=l_{q,\theta}^{[\alpha,\beta]}$, де $l_{q,\theta}^{[\alpha,\beta]}=\big\{(\xi_k): \xi_k\in[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta,\ \|(\xi_k)\|_{l_{q,\theta}^{[\alpha,\beta]}}=\big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\|\xi_k\|^q_{[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta}\big)^{1/q}<\infty\big\}$, $1/q=(1-\theta)/q_0+\theta/q_1$ [10, теорема 1.18.1].

Простори $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$, $\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_\theta$ — банахові, оскільки, згідно з (1) і (2), є інтерполяційними просторами між $\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$ і $\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^\beta)$. $\square$

2 Апроксимаційні простори

Нехай $0<\nu,\mu<\infty$, $1\le q\le\infty$, $0<\tau\le\infty$. Визначимо апроксимаційні простори вигляду

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)=\Big\{x\in\mathcal{C}^\alpha:\|x\|_{\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)}=\left(\int_0^\infty t^{\mu\tau}E(t,x)^\tau\frac{dt}{t}\right)^{1/\tau}<\infty\Big\},\\&\mathcal{E}_{q,\infty}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)=\Big\{x\in\mathcal{C}^\alpha:\|x\|_{\mathcal{E}_{q,\infty}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)}=\sup_{t>0}t^\mu E(t,x)<\infty\Big\},\end{aligned}$$

де $E(t,x)=\inf\limits_{\|y\|_{\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)}\le t}\|x-y\|_{\mathcal{C}^\alpha}$, $y\in\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)$, $0<t<\infty$.

Нехай $\big[\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)\big]^\theta$, $0<\theta<1$ — простір $\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)$ з квазінормою $\|x\|^\theta_{\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)}$. Згідно з теоремою 7.1.7 [7], при $\theta=1/(\mu+1)$ і $\tau=\theta r$ $(0<r\le\infty)$ справедлива рівність

$$\big[\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)\big]^\theta=\big(\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\big)_{\theta,r}. \tag{5}$$

Таким чином, $\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)$ можна розглядати як інтерполяційний простір між $\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$ і $\mathcal{C}^\alpha$. З рівності (5) та повноти просторів $\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$ випливає, що простори $\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)$ — квазібанахові.

Теорема 1. *Існують такі додатні числа $c_1 = c_1(\theta,\tau)$, $c_2 = c_2(\theta,\tau)$, що виконуються нерівності*

$$E(t,x) \le c_1 t^{-\mu}\|x\|_{\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)}, \quad x \in \mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha), \tag{6}$$

$$\|x\|_{\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)} \le c_2\|x\|^{\mu}_{\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)}\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha}, \quad x \in \mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{7}$$

Доведення. Згідно з теоремою 3.11.4(b) [7], для деякого додатного числа c маємо

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)_{\theta,r}} \le c\,\|x\|^{1-\theta}_{\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{C}^\alpha}, \quad x \in \mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha).$$

Звідси і з рівності (5) при $\mu = (1-\theta)/\theta$ випливає існування такої сталої $c_1 > 0$, що виконується нерівність (7). Згідно з теоремою 3.11.4(a) [7], для деякого числа $c > 0$ маємо $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha) \le ct^{\theta}\|x\|_{\left(\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)_{\theta,r}}$, $x \in \left(\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha\right)_{\theta,r}$. З цієї нерівності та (5) випливає існування такої сталої $c_0 > 0$, що $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha) \le c_0t^{\theta}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)}$, $x \in \mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)$. Покладемо $\mathcal{K}_\infty(t,x;\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha) = \inf\limits_{x=x_0+x_1}\max\left\{\|x_0\|_{\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)}, t\|x_1\|_{\mathcal{C}^\alpha}\right\}$. Оскільки $\mathcal{K}_\infty \le \mathcal{K}$, то

$$\mathcal{K}_\infty(t,x;\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha) \le c_0t^{\theta}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)}, \quad x \in \mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{8}$$

Згідно з лемою 7.1.2 [7], для кожного $t > 0$ існує таке $s > 0$, що $\mathcal{K}_\infty(t,x;\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{C}^\alpha) = s$ і $E(s+0,x) \le s/t \le E(s-0,x)$. Звідси та (8) маємо $s^{1-\theta}E^{\theta}(s,x) \le c_0^{1/\theta}\|x\|^{\theta}_{\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)}$, $x \in \mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)$. При $\mu = (1-\theta)/\theta$ отримуємо $s^{\mu}E(s,x) \le c_0^{1/\theta}\|x\|_{\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)}$, $x \in \mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha)$. Поклавши $c_1 = c_0^{1/\theta}$, приходимо до (6). □

Встановлені нерівності (6) та (7) можна розглядати як узагальнення відомих нерівностей Джексона і Бернштейна. Зокрема, нерівність (6) дає оцінку відстані від вектора $x \in \mathcal{C}^\alpha$ до підпростору $\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$.

Теорема 2. *Нехай $0 < \mu_0, \mu_1 < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \tau, \tau_0, \tau_1 \le \infty$. Для $\mu = (1-\theta)\mu_0 + \theta\mu_1$ і $\mu_0 \ne \mu_1$ виконується рівність*

$$\left(\mathcal{E}_{q,\tau_0}^{\nu,\mu_0}(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q,\tau_1}^{\nu,\mu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,\tau} = \mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(\mathcal{C}^\alpha). \tag{9}$$

При $0 < \tau \le \tilde{\tau} \le \infty$ справедливими будуть вкладення

$$\mathcal{E}_{q,\tau}^{\nu,\mu}(A) \subset \mathcal{E}_{q,\tilde{\tau}}^{\nu,\mu}(A). \tag{10}$$

Крім цього, якщо $\mathcal{E}_{q,\tau_0}^{\nu,\mu_0}(\mathcal{C}^\alpha) \subset \mathcal{E}_{q,\tau_1}^{\nu,\mu_1}(\mathcal{C}^\alpha)$ і $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, то

$$\left(\mathcal{E}_{q,\tau_0}^{\nu,\mu_0}(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q,\tau_1}^{\nu,\mu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_0,\tau} \subset \left(\mathcal{E}_{q,\tau_0}^{\nu,\mu_0}(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}_{q,\tau_1}^{\nu,\mu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_1,\tilde{\tau}}. \tag{11}$$

Доведення. Згідно з теоремою про реітерацію [7, теорема 3.11.5], при $\theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1$, $\theta_0 = 1/(\mu_0+1)$, $\theta_1 = 1/(\mu_1+1)$ і $\tau = \theta r$ маємо

$$\Big(\big[\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha)\big]^{\theta_0},\ \big[\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\big]^{\theta_1}\Big)_{\lambda,\tau} = \big[\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,r}(\mathcal{C}^\alpha)\big]^{\theta}. \tag{12}$$

Застосовуючи теорему про степені [7, теорема 3.11.6], отримуємо

$$\Big(\big[\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha)\big]^{\theta_0},\ \big[\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\big]^{\theta_1}\Big)_{\lambda,\tau} = \Big(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\ \mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\Big)^{\theta}_{\rho,r}, \tag{13}$$

де $\rho = \lambda\theta_1/\theta$. З (12) і (13) при $\mu = (1-\rho)\mu_0 + \rho\mu_1$ маємо $\Big(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\ \mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\Big)_{\rho,r} = \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,r}(\mathcal{C}^\alpha)$, звідки приходимо до (9).

При $0 < \tau \le \tilde\tau < \infty$

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,\tilde\tau}} \le \left(\int_0^\infty \big(t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\big)^{\tau}\frac{dt}{t}\right)^{1/\tilde\tau} \times$$
$$\left(\sup_{t>0} t^{-\theta}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha))\right)^{(1-\tau/\tilde\tau)} \le c\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,\tau}},$$

звідки отримуємо (10). Вкладення $\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(A) \subset \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\infty}(A)$ безпосередньо випливає із нерівності $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)) \le c_1 t^{\theta}\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)}$, $\ x \in \mathcal{E}^{\nu,\mu}_{q,\tau}(\mathcal{C}^\alpha)$.

Із нерівності $\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)) \le t\,\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)}$, $x \in \mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)$, маємо

$$\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_1,1}} = \int_0^1 t^{-\theta_1}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha))\frac{dt}{t} +$$
$$\int_1^\infty t^{-\theta_1}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha))\frac{dt}{t} \le c\,\|x\|_{\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)} +$$
$$\sup_{t>0} t^{-\theta_0}\mathcal{K}(t,x;\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha))\int_1^\infty z^{-(\theta_1-\theta_0)}\frac{dz}{z} \le$$
$$c_1\,\|x\|_{\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_0,\infty}},$$

звідки випливає вкладення $\left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_0,\infty} \subset \left(\mathcal{E}^{\nu,\mu_0}_{q,\tau_0}(\mathcal{C}^\alpha),\mathcal{E}^{\nu,\mu_1}_{q,\tau_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta_1,1}$. Звідси і з (10) отримуємо (11). □

Нехай $0 < \theta < 1$, $0 \le \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \infty$, $1 \le q \le \infty$ і простір Y співпадає з одним з просторів $\mathcal{C}^\alpha$, $(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$ або $[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta$. Розглядаємо послідовність просторів $(\mathcal{E}^{\nu(n)}_q(Y))$, що відповідає неспадній послідовності додатних чисел $(\nu(n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ такій, що $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(n) = \infty$ і визначимо простір абсолютно збіжних рядів за нормою Y вигляду

$$l[\mathcal{E}^{\nu(n)}_q(Y), Y] = \Big\{\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} y_n = y \in Y :\ y_n \in \mathcal{E}^{\nu(n)}_q(Y)\Big\}$$

з нормою $\|y\|_{l[\mathcal{E}^{\nu(n)}_q(Y),Y]} = \inf\limits_{y=\sum y_n} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\|y_n\|_Y$, де інфімум беремо по всіх таких рядах. Далі позначаємо $\mathcal{E}_q(Y) := \bigcup_{\nu>0}\mathcal{E}^{\nu}_q(Y)$.

Теорема 3. *Справедливою буде топологічна рівність*

$$l\big[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y),Y\big] = \overline{\mathcal{E}_q(Y)}, \tag{14}$$

де замикання беремо за нормою простору Y.

Доведення. Розглянемо допоміжний простір абсолютно збіжних рядів $l_1 = \big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} y_n = y : y_n \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)\big\}$ з нормою $\|y\|_{l_1} = \inf\limits_{y=\sum y_n} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)}$, де інфімум беремо по всіх таких рядах. Розглянемо також простір формальних рядів $l_1[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)] = \big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} y_n = \bar{y} : y_n \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)\big\}$ з нормою $\|\bar{y}\|_{l_1[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)]} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)}$. Він – банахів, бо його складові $\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)$ – банахові. З нерівності $\|y\|_{l_1} \le \|\bar{y}\|_{l_1[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)]}$ випливає, що відображення

$$l_1[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)] \ni \bar{y} \longmapsto y \in l_1$$

неперервне і l_1 є фактор-простором $l_1[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)]$ по замкненому ядру, і тому є банаховим.

Для будь-якого $x \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)$ маємо $\|x\|_{l_1} \le \|x\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)}$. Враховуючи вкладення

$$\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y) \subset \mathcal{E}_q^{\nu(n+1)}(Y),$$

в останній нерівності можемо перейти до границі $\|x\|_{l_1} \le \lim\limits_{n\to\infty} \|x\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)} = \|x\|_Y$. Для $\varepsilon > 0$ існує збіжний в Y ряд $\sum y_n^\varepsilon$ такий, що $\sum y_n^\varepsilon = y$ та $\|y\|_{l_1} - \varepsilon \le \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n^\varepsilon\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)} \le \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n^\varepsilon\|_Y$. З іншого боку, для будь-якого збіжного в Y ряду $\sum y_n = y$ маємо

$$\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n\|_Y \le \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n\|_{\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)}.$$

Звідки $\|y\|_{l[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y),Y]} \le \|y\|_{l_1} \le \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n^\varepsilon\|_Y + \varepsilon$, тобто $\|y\|_{l_1} = \|y\|_{l[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y),Y]}$. Отже, простір $l\big[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y),Y\big]$ — банахів.

Будь-який елемент замикання $y \in \overline{\mathcal{E}_q(Y)}$ може бути представлений збіжним за нормою Y рядом $y = \sum y_n$ таким, що $y_n \in \mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y)$, тому виконується алгебраїчна рівність $l\big[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y),Y\big] = \overline{\mathcal{E}_q(Y)}$. Очевидно, що $\|y\|_Y \le \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \|y_n\|_Y$ для будь-якого такого представлення, тому $\|y\|_Y \le \|y\|_{l[\mathcal{E}_q^{\nu(n)}(Y),Y]}$ для всіх $y \in \overline{\mathcal{E}_q(Y)}$ і рівність є топологічною. □

3 Приклад

Розглянемо у просторі $L_\rho(\Omega)$ $(1 < \rho < \infty)$ регулярно еліптичний оператор порядку $2l$

$$A : \mathcal{C}^1 \ni u \longmapsto \sum_{|\gamma|\le 2l} a_\gamma(t) D^\gamma u(t) \in L_\rho(\Omega), \quad a_\gamma \in C^\infty(\overline{\Omega}) \tag{15}$$

з областю визначення $\mathcal{C}^1 := \Big\{u \in W_\rho^{2l}(\Omega) : B_j u(t)_{|\partial\Omega} = 0;\ j = 1,\ldots,l\Big\}$, де $W_\rho^{2l}(\Omega)$ — простір Соболєва і $B_j = \sum_{|\gamma|\le k_j} b_{j,\gamma}(t) D^\gamma$, $b_{j,\gamma}(t) \in C^\infty(\partial\Omega)$, $0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_l$, — набір граничних операторів. Надалі припускаємо, що резольвентна множина оператора A непорожня. Відомо [10, § 4.9.1], що у такому випадку для достатньо великих додатних

$\rho \ge \rho_0$ оператор $A+\rho I$ — позитивний. Оскільки простори векторів експоненціального типу операторів A і $A+\rho I$ співпадають [9], то без обмеження загальності вважаємо, що A — позитивний оператор. Згідно з [10, § 5.4.3], оператор A має дискретний спектр $\sigma(A)=\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$, і кореневі підпростори $\mathcal{R}_n$ кожного власного числа $\lambda_n\in\mathbb{C}$ є скінченновимірними. Далі Lin означає лінійну алгебраїчну оболонку векторів, і простір Y співпадає з одним із просторів $(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$ або $[\mathcal{C}^\alpha,\,\mathcal{C}^\beta]_\theta$ $(0\le \operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\beta<\infty$, $1\le q<\infty$, $0<\theta<1)$.

Теорема 4. *Нехай* $1\le q_0,\,q_1<\infty$, $1/q=(1-\theta)/q_0+\theta/q_1$, $m_\kappa,n_\kappa\in\mathbb{N}$, $\kappa=0,1$, *і виконується умова щільності* $\overline{\mathcal{E}_q(Y)}=Y$. *Тоді*

$$Y=\Big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}u_n=u:\,u_n\in Lin\big\{\mathcal{R}_k:\,|\lambda_k|<\min\big(\nu(n)^{\frac{1}{m_\kappa+1}},\,\nu(n)^{\frac{1}{n_\kappa+1}}\big)\big\}\Big\},\tag{16}$$

де $\alpha=m_0(1-\theta)+n_0\theta,\ \beta=m_1(1-\theta)+n_1\theta.$

Доведення. Згідно з теоремою 1 [9], для $1\le q<\infty$ і $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^m)=Lin\big\{\mathcal{R}_n:\,|\lambda_n|^{m+1}<\nu\big\}$. Застосовуючи лему 1.2, теорему 1.15.3 [10] та враховуючи скінченновимірність просторів $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^m)$, маємо

$$\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha)=\big[\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^{m_0}),\,\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^{n_0})\big]_\theta=Lin\big\{\mathcal{R}_n:\,|\lambda_n|<\min\big(\nu^{\frac{1}{m_0+1}},\,\nu^{\frac{1}{n_0+1}}\big)\big\},\tag{17}$$

$$\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\beta)=\big[\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^{m_1}),\,\mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^{n_1})\big]_\theta=Lin\big\{\mathcal{R}_n:\,|\lambda_n|<\min\big(\nu^{\frac{1}{m_1+1}},\,\nu^{\frac{1}{n_1+1}}\big)\big\},\tag{18}$$

де $\alpha=m_0(1-\theta)+n_0\theta$, $\beta=m_1(1-\theta)+n_1\theta$. Використовуючи знову лему 1.2, із врахуванням рівностей (17) та (18), отримуємо

$$\mathcal{E}_q^\nu(Y)=Lin\big\{\mathcal{R}_n:\,|\lambda_n|<\min\big(\nu^{\frac{1}{m_\kappa+1}},\,\nu^{\frac{1}{n_\kappa+1}}\big)\big\}.$$

Рівність (16) тепер випливає з (14). □

Якщо коефіцієнти a_γ оператора A є сталими, то із результатів [9] для $1\le q<\infty$ і всіх $m\in\mathbb{N}$ маємо

$$\mathcal{E}_q(\mathcal{C}^m):=\bigcup_{\nu>0}\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^m)=\Big\{u\in Exp\,(\mathbb{C}^{\mathfrak{n}})_{|\,\Omega}:B_jA^ku_{|\,\partial\Omega}=0;j=1,\ldots,l;k\in\mathbb{Z}_+\Big\},$$

де $Exp\,(\mathbb{C}^{\mathfrak{n}})$ — простір цілих аналітичних функцій експоненціального типу над $\mathbb{C}^{\mathfrak{n}}$. Тому в цьому випадку отримуємо $Y=\Big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}u_n=u:\,u_n\in Exp\,(\mathbb{C}^{\mathfrak{n}})_{|\,\Omega};\,B_jA^ku_{n|\,\partial\Omega}=0;j=1,\ldots,l;k\in\mathbb{Z}_+\Big\}$.

Література

1. Горбачук М.Л., Горбачук В.І. *Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу* // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, №5. – С. 616–628.

2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *Операторный подход к вопросам аппроксимации* // Алгебра и анализ. – 1997. – Т.9, №6. – С. 90–108.

3. Горбачук В.И., Князюк А.В. *Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений* // Усп. мат. наук. – 1989. – Т. 44, №3. – С. 55–91.

4. Дмитришин М.І., Лопушанський О.В. *Абстрактні простори Бесова, асоційовані із замкненими операторами в банахових просторах* // Доп. НАН України. – 2007. – №12. – С. 16–22.

5. Дмитришин М., Лопушанський О. *Інтерполяція векторів експоненціального типу дробових степенів позитивних операторів* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 99–106.

6. Радыно Я.В. *Пространство векторов экспоненциального типа* // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. 27, №9. – С. 791–793.

7. Bergh J., Löfström J. Interpolation spaces. An introduction, Springer, Berlin, 1976. – 247 p.

8. Dunford N., Schwartz J.T. Linear operator. Part I: General theory. Intersci. Publishers, New York, London, 1958.

9. Lopushansky O., Dmytryshyn M. *Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum* // Chapter 12 in book *"General Topology in Banach Spaces"*. Nova Sci. Publ., Huntington, New York. 2001. P. 137–145.

10. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators, Springer, Berlin, 1995. – 664 p.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 15.10.2010

Dmytryshyn M.I. *The spaces of exponential type vectors of complex degrees of positive operators*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 21–30.

New classes of interpolation spaces of exponential type vectors of complex degrees of positive operators are defined. Properties of the approximation spaces generated by the considered interpolation spaces are investigated. An example of application of constructed theory to the regular elliptic boundary problems is considered. In the example exponential type vectors coincide with root vectors. On the other hand, for operators with constant coefficients the set of exponential type vectors is subclass of whole functions of exponential type.

Дмитришин М.И. *Пространства векторов экспоненциального типа комплексных степеней позитивных операторов* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 21–30.

Определены новые классы интерполяционных пространств векторов экспоненциального типа комплексных степеней позитивных операторов. Исследованы свойства аппроксимационных пространств, порожденных рассмотренными интерполяционными пространствами. Приведен пример применения к регулярным эллиптическим граничным задачам, в котором векторы экспоненциального типа совпадают с корневыми векторами, а для операторов с постоянными коэффициентами являются подклассом целых функций экспоненциального типа.