Карпатські математичні публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №1

УДК 517.98

Загороднюк А.В.[1], Митрофанов М.А.[2]

СЛАБКО ПОЛІНОМІАЛЬНА ТА СЛАБКО АНАЛІТИЧНА ТОПОЛОГІЯ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ І НА ПРОСТОРАХ ФРЕШЕ

Загороднюк А.В., Митрофанов М.А. *Слабко поліноміальна та слабко аналітична топологія на банахових просторах і на просторах Фреше* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 49–57.

У роботі досліджено умови співпадіння слабкої поліноміальної та слабкої аналітичної топології (слабкої $*$-поліноміальної та слабкої $*$-аналітичної топології) з топологією норми на дійсних (комплексних) банахових просторах та просторах Фреше.

Вступ

Поняття розділяючого полінома було вперше введено у розгляд Я. Курцвейлом у 1954 році у роботі [12] для встановлення умов апроксимації неперервних функцій аналітичними на дійсних сепарабельних банахових просторах. Властивості розділяючих поліномів та умови їх існування досліджувались різними авторами. Ґрунтовні огляди з цього питання можна знайти у роботах [10] та [11]. Для апроксимації рівномірно неперервних функцій на дійсних банахових просторах у праці [8] були введені у розгляд рівномірно аналітичні розділяючі функції. Для апроксимації неперервних функцій на комплексних банахових просторах у праці [2] було розглянуто поняття $*$-полінома, $*$-аналітичної функції та розділяючого $*$-полінома, рівномірно $*$-аналітичної і розділяючої функції.

У цій статті розглядаються топологічні властивості банахових просторів та просторів Фреше в залежності від існування розділяючих поліномів та рівномірно аналітичних розділяючих функцій.

Означення 1. *Нехай X — нормований простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Дійсний поліном $q\colon X \to \mathbb{R}$ називається розділяючим поліномом, якщо $q(x)$ задовольняє умову*

$$\inf_{x\in X,\ ||x||=1} |q(x) - q(0)| > 0.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46G20, 46T20.

Ключові слова і фрази: банахові простори, простори Фреше, розділяючі поліноми, розділяючі рівномірно аналітичні функції, слабко поліноміальна топологія, слабко аналітична топологія, топологія норми.

© Загороднюк А.В., Митрофанов М.А., 2012

Це означення використовується Курцвейлом у [13]. З означення 1 випливає, що дійсний поліном $q : X \to \mathbb{R}$ *не є розділяючим*, якщо q задовольняє умову

$$\inf_{x \in X,\ ||x||=1} |q(x) - q(0)| = 0.$$

Лема 1. *Якщо дійсний поліном $q(x)$ не є розділяючим на кулі радіуса 1 в банаховому просторі X, то він не є розділяючим на кулі довільного радіуса r в X. Тобто $\forall r\ \inf_{x \in X,\ ||x||=r} |q(x) - q(0)| = 0$.*

Означення 2. *$*$-Поліном $P : X \to \mathbb{C}$ називається розділяючим $*$-поліномом, якщо*

$$\inf_{x \in X,\ ||x||=1} |P(x) - P(0)| > 0.$$

Означення 3. *Нехай X є дійсним банаховим простором. Будемо казати, що дійсна функція d, визначена на X, є рівномірно аналітичною і розділяючою, якщо вона задовольняє наступні умови:*

1) d є дійсною аналітичною функцією на X в кожній точці $x \in X$ з радіусом збіжності R_{d_x} більшим або рівним за R_d для деякого $R_d > 0$,

2) існує $\beta \in \mathbb{R}$ таке, що для всіх $x \in X$ множина $d(x) < \beta$ є непорожньою і лежить у відкритій одиничній кулі B.

Означення 4. *Будемо казати, що функція $Q : X \to Y$ вигляду $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ для всіх $x \in X$, де $Q_n(x)$ — n-однорідні $*$-поліноми, є рівномірно $*$-аналітичною та розділяючою, якщо вона задовольняє наступні умови:*

1) існує таке число R_Q, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ збігається рівномірно в кулі радіуса R_Q з центром у довільній точці $x_0 \in X$,

2) існує таке $\beta \in \mathbb{R}$, що множина таких $x \in X$, що $|Q(x)| < \beta$ є непорожньою і лежить у відкритій одиничній кулі B.

Зауважимо, що враховуючи аналітичність, з умови 2) випливає, що існує $\beta \in \mathbb{R}$ таке, що множина всіх $x \in X$, для яких $d(x) \geq \beta$, не належить одиничній кулі B.

У дисертації [3] отримано наступний результат.

Теорема 1. *Нехай X та Y банахові простори, $f : Y \to \mathbb{R}$ є рівномірно аналітичною і розділяючою функцією, $g : X \to Y$ — лінійне відображення, яке володіє властивістю*

$$||g(x)|| \geqslant ||x|| \text{ для довільного } x \in X \text{ такого, що } ||x|| = 1.$$

Тоді композиція $f \circ g$ є рівномірно аналітичною і розділяючою функцією обмеженого типу.

Нехай $\mathcal{P}(X)$ — простір неперервних поліномів на X. Визначимо *слабко поліноміальну топологію* на дійсному банаховому просторі X, як найслабшу топологію w_P відносно якої всі неперервні поліноми на X зі значеннями в полі $\mathbb{R}$ будуть неперервними. Ця топологія породжується прообразами відкритих множин з $\mathbb{R}$ поліноміальних функціоналів на X. Базу цієї топології утворюють околи точок $x_0 \in X$, кожен з яких залежить від скінченного набору поліномів $p_1, \dots, p_n$ і додатних чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ та має вигляд

$$U(x_0)^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{p_1,\dots,p_n} = \{x \in X \colon |p_1(x) - p_1(x_0)| < \varepsilon_1, \dots, |p_n(x) - p_n(x_0)| < \varepsilon_n\}. \tag{1}$$

Напрямленість (x_α) збігається у топологій w_P до $x_0 \in X$ тоді (і тільки тоді) коли $p(x_\alpha) \to p(x_0)$ для кожного $p \in \mathcal{P}(X)$.

Визначимо *слабко аналітичну топологію* на дійсному банаховому просторі X, як найслабшу топологію w_A відносно якої всі неперервні аналітичні функції на X зі значеннями в полі $\mathbb{R}$ будуть неперервними. Ця топологія породжується прообразами відкритих множин з $\mathbb{R}$ аналітичних функціоналів на X. Базу цієї топології утворюють околи точок $x_0 \in X$, кожен з яких залежить від скінченного набору аналітичних функцій $f_1, \dots, f_n$ і додатних чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ та має вигляд

$$U(x_0)^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n} = \{x \in X \colon |f_1(x) - f_1(x_0)| < \varepsilon_1, \dots, |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon_n\}. \tag{2}$$

Поряд зі слабко аналітичною топологією ми можемо розглянути *рівномірно слабко аналітичну топологію* використавши у формулі (2) замість набору аналітичних функцій набір рівномірно аналітичних функцій.

У праці [4] розглянуто поняття A-збіжності, яка у наших термінах співпадає зі слабко аналітичною збіжністю. Зокрема у [4] поставлено питання: чи A-збіжность на комплексних банахових просторах співпадає зі збіжністю за нормою? У [7] дано негативну відповідь на це питання. У даній роботі досліджено умови співпадіння слабкої поліноміальної та слабкої аналітичної топології (слабкої $*$-поліноміальної та слабкої $*$-аналітичної топології) з топологією норми на дійсних (комплексних) банахових просторах та просторах Фреше.

Аналогічно на комплексному банаховому просторі ми визначимо *слабко $*$-поліноміальну топологію* (*слабко $*$-аналітичну топологію*) як найслабшу топологію w_P відносно якої всі неперервні $*$-поліноми ($*$-аналітичні функції) на X зі значеннями в полі $\mathbb{C}$ будуть неперервними.

1 Випадок банахових просторів

Теорема 2. *Слабко поліноміальна топологія на дійсному просторі X збігається з топологією норми тоді і тільки тоді, коли на X існує розділяючий поліном.*

Доведення. Зауважимо, що оскільки прообрази відкритих множин при неперервних відображеннях є відкритими, w_P-відкриті множини є відкритими в топології норми. Тобто w_P є слабшою топологією за топологію норми. Нехай на X існує розділяючий n-однорідний поліном q. Розглянемо w_P-збіжну напрямленість (x_α) до $x_0 \in X$. Для будь-якого натурального M визначимо поліном $p_M(x) := M^n q(x - x_0) = q(Mx - Mx_0)$. Збіжність (x_α) у слабко поліноміальній топології зокрема означає, що для будь-якого $M \in \mathbb{N}$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує α_0 таке, що для всіх $\alpha > \alpha_0$

$$|p_M(x_\alpha) - p_M(x_0)| = |q(Mx_\alpha - Mx_0)| < \varepsilon.$$

Виберемо $\varepsilon < \inf_{\|x\|=1} |q(x)|$ (згідно з означенням розділяючого полінома ми це можемо зробити). Тоді $\|Mx_\alpha - Mx_0\| < 1$. Справді, якщо $\|Mx_\alpha - Mx_0\| = c \geq 1$, то

$$\left| q\Big(\frac{Mx_\alpha - Mx_0}{c}\Big) \right| < \frac{\varepsilon}{c^n} < \inf_{\|x\|=1} |q(x)|,$$

що неможливо. Отже $\|x_\alpha - x_0\| < 1/M$, а це і означає, що (x_α) прямує до x_0 в топології норми. Таким чином топологія норми є слабшою за слабко поліноміальну. Тому вони співпадають.

Припустимо тепер, що w_P співпадає з топологією норми. Оскільки околи вигляду (1) утворюють базу w_P, то існує непорожній окіл $U(x_0)^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{p_1,\dots,p_n}$, який повністю лежить у відкритій одиничній кулі B_X з центром в нулі простору X. Перейшовши до поліномів $p_k(x-x_0)$ можна вважати, що $x_0 = 0$. Крім того, без втрати загальності можна вважати, що $p_k(0) = 0$, $k = 1, \dots, n$. Визначимо $q(x) = \sum_{k=1}^{n} (p_k(x))^2$ і $\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_n^2$. Тоді

$$U(0)^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{p_1,\dots,p_n} = U(0)^{\varepsilon}_{q} = \{x \in X : |q(x)| < \varepsilon\} \subset B_X.$$

Тобто для кожної точки $x \in X$, $\|x\| = 1$ маємо, що $|q(x)| \geq \varepsilon$. Отже q — розділяючий поліном. $\square$

Зауважимо, що оскільки неперервні поліноми розділяють точки простору X, то слабко поліноміальна топологія є гаусдорфовою. Тому, за теоремою Стоуна-Вейєрштраса (див. [6, теорема 3.2.21]), кожна w_P-неперервна функція на X наближається поліномами рівномірно на компактах у топології w_P. У випадку, коли X допускає розділяючий поліном, w_P-компакти є компактами в $(X, \|\cdot\|)$ і мають порожню внутрішність, якщо $\dim X = \infty$. Проте, саме в цьому випадку (теорема Курцвейля) кожна рівномірно неперервна функція на X апроксимується аналітичними функціями рівномірно на всьому просторі. Можливий інший крайній випадок, коли слабко поліноміальна топологія співпадає зі слабкою топологією на обмежених множинах. Тоді замкнена куля в $\overline{B}_X \in X$ є w_P-відносно компактним простором і теорема Стоуна-Вейєрштраса гарантує, що кожна $*$-слабко неперервна функція на $\overline{B}_{X''}$ апроксимується поліномами рівномірно на $\overline{B}_X$. Проте і в цьому випадку може трапитись, що X допускає рівномірно аналітичну розділяючу функцію (як, наприклад, $X = c_0$) і кожна рівномірно неперервна функція апроксимується аналітичними рівномірно на X [8]. З іншого боку існує багато просторів (як, наприклад, ℓ_p для непарних p) для яких w_P є строго сильнішою за слабку топологію на обмежених множинах і строго слабшою за топологію норми, і в яких не кожна неперервна функція наближається аналітичними на X. Ці приклади показують, що апроксимація аналітичними функціями суттєво відрізняється від поліноміальної апроксимації і умови існування такої апроксимації суттєво відрізняються від умов теореми Стоуна-Вейєрштраса.

Добре відомо, що у нескінченновимірному банаховому просторі одинична сфера є щільною в одиничній кулі у слабкій топології. Наступна теорема показує, що при певних умовах w_P має таку ж властивість.

Теорема 3. *Нехай X — нескінченновимірний дійсний банахів простір. Одинична сфера S_X є щільною в одиничній кулі $\overline{B}_X$ у слабко поліноміальній топології тоді і тільки тоді, коли X не допускає розділяючого полінома.*

Доведення. Припустимо що сфера S_X є щільною в $\overline{B}_X$ у слабко поліноміальній топології. Тоді існує напрямленість $(x_\alpha) \subset S_X$ така, що $p(x_\alpha) \to 0$ для кожного $p \in \mathcal{P}(X)$. Це означає, що жоден поліном $p \in \mathcal{P}(X)$ не є розділяючим.

Припустимо, що не існує розділяючих поліномів на X. Покажемо, що 0 належить замиканню S_X у w_P. Для цього достатньо показати, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ і скінченного набору поліномів $p_1, \dots, p_n$ існує елемент $x \in S_X$ такий, що $|p_k(x)| < \varepsilon$, $k = 1, \dots, n$. Такий елемент існує, оскільки $p = \sum_{k=1}^{n} p_k^2$ не розділяючий і в якості x можна взяти елемент з S_X для якого $|p(x)| < \varepsilon$.

Нехай, x_0 — довільний вектор з B_X. Застосувавши афінне ізометричне перетворення $x \mapsto x - x_0$ зведемо нашу задачу до пошуку напрямленості в $S_X - x_0$, яка слабко поліноміально збігається до нуля. Виберемо $r > 0$ так, що куля rB_X радіуса r з центром нулі лежить в $B_X - x_0$. Оскільки не існує розділяючого полінома на X, то за лемою 1 не існує полінома q, який би відділяв сферу rS_X від нуля. Повторюючи міркування з попереднього абзацу отримуємо напрямленість $x_\alpha \in rS_X$, яка слабко поліноміально збігається до нуля. Нехай $y_\alpha = \lambda_\alpha x_\alpha$, де λ_α — таке додатне число, що $y_\alpha \in S_X - x_0$. Зауважимо, що $\lambda_\alpha < 2$. Оскільки для кожного m-однорідного полінома p_m, $|p_m(x_\alpha)| \to 0$, то $|p_m(y_\alpha)| \le 2^m |p_m(x_\alpha)| \to 0$. Довільний поліном є сумою однорідних, тому $p(y_\alpha) \to 0$. $\square$

Нехай простір X є комплексним банаховим простором. Припустимо, що на просторі X існує розділяючий $*$-поліном q. Якщо на X розглянути слабко $*$-поліноміальну топологію, то для простору X виконується аналогічна до теореми 2

Теорема 4. *Слабко $*$-поліноміальна топологія на комплексному банаховиому просторі X збігається з топологією норми тоді і тільки тоді, коли на X існує розділяючий $*$-поліном.*

Доведення. Для комплексного банахового простору X позначимо через $\widetilde{X}$ той самий простір (як множину), але над полем дійсних чисел. Точніше, носії просторів X та $\widetilde{X}$ співпадають, але на $\widetilde{X}$ визначено тільки множення на дійсні скаляри. Якщо на просторі X існує розділяючий $*$-поліном q, то на просторі $\widetilde{X}$ існує розділяючий поліном $p = q\bar{q}$. Оскільки, слабко $*$-поліноміальна топологія на комплексному банаховиому просторі X співпадає зі слабко поліноміальною топологією на просторі $\widetilde{X}$, ми можемо застосувати до $\widetilde{X}$ теорему 2. $\square$

Аналогічно легко довести аналог теореми 3.

Теорема 5. *Нехай X — нескінченновимірний комплексний банахів простір. Одинична сфера S_X є щільною в одиничній кулі $\overline{B}_X$ у слабко $*$-поліноміальній топології тоді і тільки тоді, коли X не допускає розділяючого $*$-полінома.*

Теорема 6. *Якщо на дійсному просторі X існує розділяюча аналітична функція, то слабко аналітична топологія на X збігається з топологією норми. Якщо рівномірно слабко аналітична топологія на дійсному просторі X збігається з топологією норми, то на X існує розділяюча аналітична функція.*

Доведення. Зауважимо, що оскільки прообрази відкритих множин при неперервних відображеннях є відкритими, w_A-відкриті множини є відкритими в топології норми. Тобто w_A є слабшою топологією за топологію норми. Нехай на X існує розділяюча аналітична функція q. Розглянемо w_A-збіжну напрямленість (x_α) до $x_0 \in X$. Для будь-якого натурального M визначимо аналітичну функцію $f_M(x) := q(Mx - Mx_0)$. Оскільки q розділяюча аналітична функція, то за теоремою 1 для довільного $M \in \mathbb{N}$ функція $q(Mx)$ буде розділяючою аналітичною функцією. З іншого боку, якщо напрямленість (x_α) збігається до $x_0 \in X$ в w_A топології, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує α_0, що для $\alpha > \alpha_0$ $q(M(x_\alpha - x_0)) < \varepsilon$. Покажемо, що $\|x_\alpha - x_0\| \to 0$. Припустимо, що це не так, тобто існує таке δ, що для довільного α_0 існує $\alpha > \alpha_0$ таке, що $\|x_\alpha - x_0\| > \delta$. Зафіксуємо $M \in \mathbb{N}$ таке, щоб $M > \frac{1}{\delta}$, тоді для довільного α_0 існує $\alpha > \alpha_0$ таке, що $\|Mx_\alpha - Mx_0\| > 1$. Візьмемо число $\beta \in \mathbb{R}$ з означення 3. Якщо $q(x) < \beta$, то $x \leqslant 1$, тому виберемо $\varepsilon < \beta$. Отримаємо, що $q(M(x_\alpha - x_0))\varepsilon < \beta$, але $|M(x_\alpha - x_0)| > 1$. Це суперечить тому, що q рівномірно аналітична розділяюча функція.

Припустимо тепер, що w_{RA} співпадає з топологією норми. Оскільки околи вигляду (2) утворюють базу w_{RA}, то існує непорожній окіл $U(x_0)^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n}$, який повністю лежить у відкритій одиничній кулі з центром в нулі B_X простору X. Без втрати загальності можемо вважати, що $x_0 = 0$ та $f_k(0) = 0$, $k = 1, \dots, n$. Визначимо $q(x) = \sum_{k=1}^n (f_k(x))^2$ і $\varepsilon = \sum_{k=1}^n \varepsilon_n^2$. Тоді

$$U(0)^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}_{f_1,\dots,f_n} = U(0)^{\varepsilon}_{q} = \{x \in X : |q(x)| < \varepsilon\} \subset B_X.$$

Тобто для кожної точки $x \in X$, $\|x\| = 1$ маємо, що $|q(x)| \geq \varepsilon$. Оскільки всі f_k, $k = 1, \dots, n$, є рівномірно аналітичними, то q рівномірно аналітична функція. Отже q — рівномірно аналітична розділяюча функція. □

Питання співпадіння слабко аналітичної топології з рівномірно слабко аналітичною топологією залишається відкритим.

Наслідок 1. *На просторах l_p та L_p для парних p слабко поліноміальна топологія збігається зі слабко аналітичною топологією та топологією норми.*

Наслідок 2. *На замкнених підпросторах c_0 слабко аналітична топологія збігається з топологією норми.*

Наслідок 3. *На просторі c_0 слабко поліноміальна топологія не співпадає зі слабко аналітичною топологією.*

2 Випадок просторів Фреше

Нагадаємо, що лінійний топологічний простір X є простором Фреше, якщо X є метризовним повною метрикою локально опуклим простором. Відомо, що це означення еквівалентне до наявності на X зліченної системи узгоджених напівнорм (див. [1, 3.5.3]) $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, які задають повну метрику ρ на X наступним способом [5]

$$\rho(x,y) = \sum_n \frac{1}{2^n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.$$

Топологія, що породжується метрикою ρ на просторі X, є найслабшою топологією, відносно якої всі напівнорми p_n є неперервними. Базу околів нуля цієї топології утворює сім'я $\{U_{p_n}(0) : n \in \mathbb{N}\}$, де $U_{p_n}(0) = \{x \in X : \ p_k(x) < \frac{1}{n} \ \text{ для всіх } \ 1 \leqslant k \leqslant n\}$. При цьому послідовність $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ точок простору X прямує до точки $x_0 \in X$ тоді і лише тоді, коли для довільного $k \in \mathbb{N}$ послідовність $\{p_k(x_n - x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ прямує до нуля при $n \to \infty$. Для нормованого простору Y функція $f : X \to Y$ є неперервною в точці x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X$, що прямує до x_0, послідовність $\{f(x_n)\} \subset Y$ прямує до $f(x_0)$.

Зафіксуємо напівнорму p_n на X. Відомо, що $\ker p_n$ є замкненим лінійним підпростором. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через X_n простір X з нормою $||\cdot||_n$, тобто $X_n = (X, ||\cdot||_n)$. Аналогічно як і у випадку банахових просторів визначимо *слабко поліноміальну топологію*, *слабко аналітичну топологію* (*слабко $*$-поліноміальну топологію*, *слабко $*$-аналітичну топологію*) на дійсному (комплексному) просторі Фреше X як найслабшу топологію w_P, відносно якої всі неперервні поліноми ($*$-поліноми), аналітичні ($*$-аналітичні) функції на X зі значеннями в полі $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) будуть неперервними.

Зрозуміло, що простір $\mathcal{P}(X)$ всіх неперервних поліномів на просторі X містить простір $\mathcal{P}(X_n)$ всіх неперервних поліномів на просторі X_n для довільного $n \in \mathbb{N}$.

Позначимо через w_{P_n} слабко поліноміальну топологію на просторі X_n. На просторі X очевидним є наступне співвідношення топологій $w_P \succ w_{P_n}$, тобто топологія w_P сильніша за топологію w_{P_n}.

Теорема 7. *Нехай простір X є дійсним простором Фреше зі зліченною системою норм $\{||\cdot||_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, який не є банаховим простором, тоді X не допускає полінома, який був би розділяючим для всіх X_n.*

Доведення. Припустимо, що на просторі X існує поліном p, який є розділяючим для всіх X_n. Тоді топологія w_{P_n} співпадає з топологією норми $||\cdot||_n$ на кулі в X_n. Але, як зауважено вище, топологія w_P сильніша за топологію w_{P_n}, отже, топологія w_P є сильнішою за топологію норми на X_n. З іншого боку топологія w_P є слабшою за топологію Фреше на X, яка є найслабшою топологією, в якій всі $||\cdot||_n$ неперервні. Отже, w_P є слабшою за топологію норми $||\cdot||_n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Тому топологія Фреше співпадає з топологією норми на просторі X, але це суперечить умові теореми про те, що простір X не є банаховим. □

Подібним чином легко довести комплексний аналог теореми 7.

Теорема 8. *Нехай простір X є сепарабельним комплексним простором Фреше зі зліченною системою норм $\{||\cdot||_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, який не є банаховим простором, тоді X не допускає розділяючого $*$-полінома.*

Теорема 9. *Нехай простір X є дійсним простором Фреше зі зліченною системою норм $\{||\cdot||_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, який не є банаховим простором. Якщо для довільного $n\in\mathbb{N}$ простір X_n допускає розділяючий поліном f_n, то існує аналітична функція f на X, яка є рівномірно аналітична розділяюча для всіх X_n.*

Доведення. Побудуємо за системою напівнорм $\{||\cdot||_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ зростаючу систему напівнорм $\{||\cdot||_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$, поклавши $\{||\cdot||_i' = \sum_{n=1}^{i}||\cdot||_n\}_{i,n\in\mathbb{N}}$.

Без втрати загальності можна вважати, що f_n — однорідні розділяючі поліноми такі, що $||f_n||_n = 1$, $\deg f_n = m_n$ для кожного $n\in\mathbb{N}$ та $m_1 \leqslant m_2 \leqslant m_n \leqslant \ldots$. Тоді $m_1 < 2m_2 < \ldots < nm_n < \ldots$.

Розглянемо функцію $f = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m_n n)!}f_{m_n}^n = \sum_{n=1}^{\infty} g_{m_n}$, де $g_{m_n} = \frac{1}{(nm_n)!}f_{m_n}^n$. З того що $||f_n||_n = 1$ отримуємо $||g_{m_n}||_N = \frac{1}{(nm_n)!}||f_{m_n}^n||_N \leqslant \frac{1}{(nm_n)!}$ для всіх $N > m_n$. Тому для довільного X_n радіус збіжності функції f дорівнює нескінченності, оскільки

$$\frac{1}{R(g)} = \limsup_{n\to\infty}||g(n)||^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Для функції f виконується друга властивість рівномірно аналітичної і розділяючої функції у кожному просторі X_n, а саме для довільного $n\in\mathbb{N}$ існує число β_n таке, що множина $\{x\in X_n : |f(x)| < \beta_n\}$ є непорожньою і лежить у відкритій одиничній кулі простору X_n. Справді, для довільного $n\in\mathbb{N}$ можна вибрати β_n так, щоб з рівності $||x||_n = 1$ випливала нерівність $f(x) \geqslant \beta_n$. Оскільки f_{m_n} — розділяючі поліноми, то досить вибрати β_n так, щоб $0 < \beta_n \leqslant \frac{1}{(nm_n)!}$. □

Література

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа — М.: Наука, 1989. — 634 с.

2. Митрофанов М.А. *Аппроксимация непрерывных функций на комплексных банаховых пространствах* // Математические заметки — 2009. — Т. 86, Вып.4. — С. 557–570.

3. Митрофанов М.А. Неперервні відображення на банахових просторах. Апроксимація та зв'язок з алгебрами аналітичних функцій. Дисертація на здобуття наук. ступеня канд. фіз.- мат. наук: 01.01.01 — Івано-Франківськ, 2011 — 132 с.

4. Петунин Ю.И., Савкин В.И. *Сходимость, порожденная аналитическими функционалами, и изоморфизм алгебр аналитических функционалов* // Укр. мат. журн. — 1988. — Т.40, № 6. — С. 799–803.

5. Шефер Х. Топологические векторные пространства — М.: Мир, 1971. — 360 с.

6. Энгелькинг Р. Общая топология — М.: Мир, 1986. — 752 с.

7. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math., **415**, (1991), 51–93.

8. Boiso M.C., Hájek P. *Analytic Approximations of Uniformly Continuous Functions in Real Banach Spaces*, J. Math. Anal. Appl., **256** (2001), 80–98.

9. Dineen S. Complex analysis on infinite-dimensional spaces, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999.

10. Fabian M., Preiss D., Whitfield J. H. M., Zizler V.E. *Separating polynomials on Banach spaces*, Quart. J. Math. Oxford Ser., **40**, 2 (1989), 409–422.

11. Gonzalo R. Jaramillo J.A. *Separating polynomials on Banach spaces* Extracta mathematicae, **12**, 2 (1997), 145–164.

12. Kurzweil J. *On approximation in real Banach spaces*, Studia Math., **14**, (1954), 214–231.

13. Kurzweil J. *On approximation in real Banach spaces by analytic operations*, Studia Math., **16**, (1957), 124–129.

[1] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
e-mail: *andriyzag@yahoo.com*

[2] Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна

Надійшло 16.04.2012

Zagorodnyuk A.V. Mytrofanov M.A. *Weak polynomial topology and weak analytic topology on Banach spaces and on Freshet spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 49–57.

We investigate under which conditions weak polynomial or weak analytic topology ($*$-weak polynomial or $*$-weak analytic topology) coincides whith the norm topology on a real (complex) Banach or Freshet space.

Загороднюк А.В., Митрофанов М.А. *Слабо полиномиальная и слабо аналитическая топология на банаховых пространствах и на простанствах Фреше* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 49–57.

В роботе исследованы условия совпадений слабой полиномиальной и слабой аналитической топологий (слабой $*$-полиномиальной и слабой $*$-аналитической топологий) с топологией нормы на действительных (комплексных) банаховых пространствах и пространствах Фреше.