ISSN 2075-9827 `http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp`
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 150–155 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.150–155
doi:10.15330/cmp.5.1.150-155

Шахно С.М., Ярмола Г.П.

ДВОКРОКОВИЙ МЕТОД ТИПУ ХОРД З АПРОКСИМАЦІЄЮ ОБЕРНЕНОГО ОПЕРАТОРА

Запропоновано двокроковий метод типу хорд з послідовною апроксимацією оберненого оператора для розв'язування нелінійних рівнянь. Досліджено локальну збіжність методу та встановлено квадратичний порядок збіжності. На тестових задачах проведено числовий експеримент.

Ключові слова і фрази: апроксимація оберненого оператора, метод типу хорд, порядок збіжності.

Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
E-mail: s_shakhno@franko.lviv.ua (Шахно С.М.), halina_yarmola@ukr.net (Ярмола Г.П.)

Вступ

Нехай потрібно знайти наближений розв'язок x_* нелінійного рівняння

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

де оператор F визначений на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями у банаховому просторі Y. Для розв'язування рівняння (1) існує багато методів. Зокрема, метод Ньютона, Стеффенсена, різницеві методи [1, 4, 8]. При цьому на кожному ітераційному кроці потрібно знаходити обернений оператор (розв'язувати лінійне операторне рівняння). Оскільки це завдання є складним, тому можна застосовувати методи з апроксимацією оберненого оператора, які не потребують розв'язування лінійних задач.

Існує два підходи до апроксимації оберненого оператора: послідовна та паралельна (синхронна та асинхронна). Методи з паралельною апроксимацією оберненого оператора застосовують при чисельному розв'язуванні (1) на процесорах, що працюють паралельно. Методи з апроксимацією оберненого оператора складаються з двох гілок. Одна з них призначена для побудови наближень до розв'язку нелінійного рівняння (1), а інша — для апроксимації оберненого оператора.

Методи з послідовною апроксимацією оберненого оператора досліджували багато авторів. У [5] вивчено локальну збіжність модифікацій методів Ньютона та Стеффенсена. Дослідження однопараметричного класу методів типу Ньютона та метод типу Стеффенсена з послідовною апроксимацією оберненого оператора проведено у [3]. Обґрунтуванню збіжності методів з послідовною апроксимацією оберненого оператора присвячені також праці [6, 7].

УДК 519.6
2010 *Mathematics Subject Classification:* 65J15, 65H10.

Для розв'язування (1) ми пропонуємо двокроковий ітераційний процес

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = x_n - A_n F(x_n), \quad y_{n+1} = x_{n+1} - A_n F(x_{n+1}), \\ &A_{n+1} = A_n[2I - F(u_{n+1}, v_{n+1})A_n], \quad n = 0,\ 1, \dots, \end{aligned} \tag{2}$$

де x_0 і A_0 — початкові наближення до розв'язку x_* і до оператора $A_* = [F'(x_*)]^{-1}$ відповідно, I — одиничний оператор, $F(u,v)$ — поділена різниця першого порядку оператора F за точками u і v, $u_n = x_n + a_n(y_n - x_n)$, $v_n = x_n + b_n(y_n - x_n)$, $a_n \in [-1;1]$, $b_n \in [0;1]$. Цей метод побудований на базі двокрокового методу

$$x_{n+1} = x_n - [F(u_n, v_n)]^{-1}F(x_n), \quad y_{n+1} = x_{n+1} - [F(u_n, v_n)]^{-1}F(x_{n+1}), \quad n = 0,\ 1, \dots, \tag{3}$$

запропонованого у [4]. Зауважимо, що частковим випадком методу (2) при значеннях параметрів $a_n = 0$ і $b_n = 0$ є метод, запропонований С.Ю. Ульмом у статті [5].

У цій праці показано результати теоретичного аналізу збіжності та числового дослідження ітераційного процесу (2).

1 Локальна збіжність методу з послідовною апроксимацією оберненого оператора

Означення 1. *Обмежений лінійний оператор, який діє з X в Y, позначуваний $F(x,y)$, будемо називати поділеною різницею першого порядку для оператора F за фіксованими точками x і y ($x \neq y$), якщо виконується рівність $F(x,y)(x-y) = F(x) - F(y)$.*

У випадку, коли $x = y$ вважатимемо, що $F(x,x) = F'(x)$, де $F'(x)$ — похідна Фреше нелінійного оператора F у точці x.

Наступна теорема встановлює умови, при яких ітераційний процес (2) є збіжним. У доведенні теореми використовуються ідеї, викладені у роботі [5].

Теорема 1. *Нехай F — нелінійний оператор, визначений у відкритій опуклій області D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Припустимо, що:*

1) рівняння (1) має розв'язок $x_* \in D$, існує похідна Фреше $F'(x_*)$ і вона оборотна;

2) в кулі $U = \{x : \ \|x - x_*\| \le r_0\}$ функція $F(x)$ має поділені різниці першого порядку $F(x,y)$, які задовольняють умову Ліпшиця:

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \le L(\|x-u\| + \|y-v\|); \tag{4}$$

3) $\|F'(x_*)\| \le C$, $\|[F'(x_*)]^{-1}\| \le B$,

4) $h_0 = \max\{K_0,\ M_0 r_0,\ N_0\} < \dfrac{1}{r_0}$, де

$$K_0 = C + L(B + r_0),\ M_0 = [C + L(B+r_0)K_0 r_0]K_0,\ N_0 = [C + (2+a)L(B+r_0)^2 K_0],$$
$$a = \begin{cases} 0,\ a_n \ge 0, \\ 2,\ a_n < 0, \end{cases} \quad r_0 = \max\{\|x_0 - x_*\|,\ \|y_0 - x_*\|,\ \|A_0 - A_*\|\}.$$

Тоді послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{A_n\}$, $n = 0, 1, \dots$ збігаються відповідно до x_*, A_*, причому справджується оцінка

$$r_n = \max\{\|x_n - x_*\|, \|y_n - x_*\|, \|A_n - A_*\|\} \le (h_0 r_0)^{2^n - 1} r_0,\ \ n = 0, 1, \dots. \tag{5}$$

Доведення. Враховуючи (2), маємо

$$x_{n+1} - x_* = x_n - x_* - A_n[F(x_n) - F(x_*)] = [I - A_n F(x_n, x_*)](x_n - x_*),$$
$$y_{n+1} - x_* = x_{n+1} - x_* - A_n[F(x_{n+1}) - F(x_*)] = [I - A_n F(x_{n+1}, x_*)](x_{n+1} - x_*).$$

Оскільки виконується $I - A_n F(x_n, x_*) = A_* F'(x_*) - A_n F'(x_*) + A_n F'(x_*) - A_n F(x_n, x_*) = (A_* - A_n)F'(x_*) + A_n(F'(x_*) - F(x_n, x_*))$ і $\|A_n\| \le \|A_*\| + \|A_n - A_*\| \le B + \|A_n - A_*\|$, то, використовуючи умову 3) теореми, отримаємо

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_*\| &\le [C\|A_n - A_*\| + L(B + \|A_n - A_*\|)\|x_n - x_*\|]\|x_n - x_*\| \\ &\le [C + L(B + r_0)]r_n^2 = K_0 r_n^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|y_{n+1} - x_*\| &\le [C\|A_n - A_*\| + L(B + \|A_n - A_*\|)\|x_{n+1} - x_*\|]\|x_{n+1} - x_*\| \\ &\le [C\|A_n - A_*\| + L(B + \|A_n - A_*\|)K_0 r_n^2]K_0 r_n^2 \le [C + L(B + r_0)K_0 r_0]K_0 r_n^3 = M_0 r_n^3.\end{aligned}$$

З іншого боку

$$\begin{aligned}A_{n+1} - A_* =& A_n[2I - F(u_{n+1}, v_{n+1})A_n] - A_* = A_n[I + A_* F'(x_*) - F(u_{n+1}, v_{n+1})A_n] - A_* \\ =& A_n[I + F'(x_*)A_* - F'(x_*)A_n + F'(x_*)A_n - F(u_{n+1}, v_{n+1})A_n] - A_* \\ =& A_n[I + F'(x_*)(A_* - A_n) + (F'(x_*) - F(u_{n+1}, v_{n+1}))A_n] - A_* \\ =& [I - A_n F'(x_*)](A_n - A_*) + A_n(F'(x_*) - F(u_{n+1}, v_{n+1}))A_n \\ =& [A_* - A_n]F'(x_*)(A_n - A_*) + A_n(F'(x_*) - F(u_{n+1}, v_{n+1}))A_n.\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - x_*\| + \|v_{n+1} - x_*\| \le& (2 - a_{n+1} - b_{n+1})\|x_{n+1} - x_*\| \\ &+ (|a_{n+1}| + b_{n+1})\|y_{n+1} - x_*\| \le (2 + a)\|x_{n+1} - x_*\|,\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\|A_{n+1} - A_*\| \le& C\|A_n - A_*\|^2 + (B + \|A_n - A_*\|)^2 L(\|u_{n+1} - x_*\| + \|v_{n+1} - x_*\|) \\ \le& C\|A_n - A_*\|^2 + (2 + a)L(B + \|A_n - A_*\|)^2\|x_{n+1} - x_*\| \\ \le& [C + (2 + a)L(B + r_0)^2 K_0]r_n^2 = N_0 r_n^2.\end{aligned}$$

Методом математичної індукції доведемо, що (5) виконується для всіх n. Поклавши $k = 1$, отримаємо

$$r_1 = \max\{\|x_1 - x_*\|, \|y_1 - x_*\|, \|A_1 - A_*\|\} \le h_0 r_0^2 = (h_0 r_0)^{2^1 - 1} r_0.$$

Припустимо, що оцінка (5) виконується для $k = \overline{1, n-1}$. Тоді для $k = n$ матимемо

$$r_n = \max\{\|x_n - x_*\|, \|y_n - x_*\|, \|A_n - A_*\|\} \le h_0 r_{n-1}^2 = h_0 (h_0 r_0)^{2^n - 2} r_0^2 = (h_0 r_0)^{2^n - 1} r_0.$$

Оскільки

$$\|x_{n+1} - x_*\| \le K_0 r_n \|x_n - x_*\|, \qquad \|y_{n+1} - x_*\| \le M_0 r_n^2 \|x_{n+1} - x_*\|,$$

то, враховуючи, що $r_n < r_0$ і $h_0 r_0 < 1$, отримаємо

$$\|x_{n+1} - x_*\| < \|x_n - x_*\| < \ldots < \|x_0 - x_*\| \le r_0,$$
$$\|y_{n+1} - x_*\| < \|x_{n+1} - x_*\| < \ldots < \|x_0 - x_*\| \le r_0.$$

Отже, послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ належать кулі U. □

Зауваження 1. *З оцінки (5) випливає, що порядок збіжності ітераційного процесу (2) — квадратичний. При цьому припускається, що поділені різниці першого порядку задовольняють лише умову Ліпшиця.*

2 Числові експерименти

Практичне дослідження методу (2) проведено на тестових прикладах з [2, 5]. Ми застосовуємо двокроковий метод типу хорд з послідовною апроксимацією оберненого оператора для розв'язування систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь та нелінійних інтегральних рівнянь. Розрахунки проводяться при сталих значеннях параметрів a_n і b_n. Числові результати, отримані методом (2), порівнюються із результатами, отриманими методом (3).

Приклад 1. *Тридіагональна функція Бройдена*

$$\begin{array}{ll} f^i = x^i(0.5x^i - 3) + 2x^{i+1} - 1, & i = 1, \\ f^i = x^i(0.5x^i - 3) + x^{i-1} + 2x^{i+1} - 1, & 1 < i < m, \\ f^i = x^i(0.5x^i - 3) + x^{i-1} - 1 & i = m, \\ x_0^i = -1,\ i = \overline{1,m}. & \end{array}$$

Приклад 2. *Тригонометрична система*

$$\begin{array}{l} k = div(i-1, 5) \\ f^i = 5 - (k+1)(1-\cos(x^i)) - \sin(x^i) - \sum\limits_{j=5k+1}^{5k+5} \cos(x^j) \\ x_0^i = 1/n, \qquad\qquad i = \overline{1,m}. \end{array}$$

Приклад 3. *Тригонометрично-експоненціальна функція*

$$\begin{array}{ll} f^i = 3(x^i)^3 + 2x^{i+1} - 5 + \sin\left(x^i - x^{i+1}\right)\sin\left(x^i + x^{i+1}\right), & i = 1, \\ f^i = 3(x^i)^3 + 2x^{i+1} - 5 + \sin\left(x^i - x^{i+1}\right)\sin\left(x^i + x^{i+1}\right) & \\ \quad + 4x^i - x^{i-1}\exp\left(x^{i-1} - x^i\right) - 3, & 1 < i < m, \\ f^i = 4x^i - x^{i-1}\exp\left(x^{i-1} - x^i\right) - 3, & i = m, \\ x_0^i = 2,\ \ i = \overline{1,m}. & \end{array}$$

Приклад 4. *Нелінійне інтегральне рівняння*

$$\begin{array}{l} x(s) - \int\limits_0^1 (1 - 0.4854s + s^2 + st\arctan(x))dt = 0,\ s,\ t \in [0,1], \\ x_0(i) = 1.5. \end{array}$$

Зупинка обчислювального процесу відбувалася за умови $\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \le \varepsilon$. Розрахунки проводилися для систем нелінійних рівнянь розмірності $m = 100$. Для методів (2) і (3) додаткове початкове наближення y_0 було обчислене за правилом: $y_0^i = x_0^i + 10^{-4}, i = \overline{1,m}$, і для методу (2) $A_0 = [F(u_0, v_0)]^{-1}$. Обчислення виконувалися з точністю $\varepsilon = 10^{-8}$ для прикладів 1 і 3, а для прикладу 2 — з точністю $\varepsilon = 10^{-10}$. У таблицях 1 – 3 наведено кількість ітерацій, необхідних для отримання наближеного розв'язку систем із прикладів 1 – 3 відповідно.

Як бачимо, швидкість збіжності методу (2) практично однакова при різних значеннях параметрів a_n і b_n. Серед диференціальних методів найшвидше збігаються методи з параметрами $a_n = 0.5$, $b_n = 0.5$ і $a_n = 1$, $b_n = 1$, а серед різницевих — методи з параметрами $a_n = 1$, $b_n = 0$ і $a_n = 1$, $b_n = 0.5$. За кількістю ітерацій, необхідних для знаходження

Метод (2)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	7	7	7	7	6
-0.5	7	7	7	6	6
0	7	7	6	6	6
0.5	7	6	6	6	6
1	6	6	6	6	6

Метод (3)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	5	5	5	5	5
-0.5	5	5	5	5	4
0	5	5	5	7	4
0.5	5	5	7	4	7
1	5	4	4	7	5

Табл. 1: Результати обчислень для прикладу 1 при $\varepsilon = 10^{-8}$

Метод (2)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	5	5	5	5	5
-0.5	5	5	5	5	5
0	5	5	5	5	5
0.5	5	5	5	5	5
1	5	5	5	5	5

Метод (3)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	5	5	5	5	4
-0.5	5	5	5	4	4
0	5	5	4	4	4
0.5	5	4	4	4	4
1	4	4	4	4	4

Табл. 2: Результати обчислень для прикладу 2 при $\varepsilon = 10^{-10}$

Метод (2)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	7	7	7	7	7
-0.5	7	7	7	7	7
0	7	7	7	7	6
0.5	7	7	7	6	6
1	7	7	6	6	6

Метод (3)

b \ a	-1	-0.5	0	0.5	1
-1	6	6	6	6	6
-0.5	6	6	6	6	5
0	6	8	6	5	5
0.5	6	6	5	5	5
1	7	5	6	5	5

Табл. 3: Результати обчислень для прикладу 3 при $\varepsilon = 10^{-8}$

наближеного розв'язку системи рівнянь, запропонований нами метод з апроксимацією оберненого оператора (2) дещо поступається базовому методу (3). Проте його перевагою є те, що не потрібно розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному ітераційному кроці. Аналогічно, як у [5], ми порівнювали метод (2) з модифікацією методу (3), коли поділена різниця обчислюється лише один раз у точках u_0 і v_0. При цьому метод з послідовною апроксимацією оберненого оператора виявився ефективнішим.

n	$a = 0.5,\ b = 0.5$	$a = 0,\ b = 1$	$a = 1,\ b = -1$
1	2.008599938909832	2.008697259718701	2.007332718049135
2	1.999784032136865	1.999779182305491	1.999825757262160
3	2.000008159680034	2.000008346561328	2.000006697802527
4	2.000000866874908	2.000000859624378	2.000000921510420

Табл. 4: Результати обчислень для нелінійного інтегрального рівняння 4 при $\varepsilon = 10^{-5}$

Розв'язування нелінійного інтегрального рівняння методом (2) проводилось за схемою, запропонованою у [5]. Для наближеного обчислення інтегралів застосовували формулу трапецій з кроком $h = \dfrac{1}{m}$

$$\int_0^1 K\left(s,t,x\left(t\right)\right)dt \approx \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}K\left(s,t_0,x^0\right) + \sum_{i=1}^{m-1} K\left(s,t_i,x^i\right) + \frac{1}{2}K\left(s,t_m,x^m\right)\right),$$

де $x^i \approx x\left(ih\right)$. Точний розв'язок інтегрального рівняння — $x_*(s) = 1 + s^2$. У таблиці 4 подано значення наближення до розв'язку у точці $s = 1$ на кожному ітераційному кроці. Результати наведено для модифікацій диференціального ($a = 0.5,\ b = 0.5$) та різницевого ($a = 0,\ b = 1$) методів з порядком $1+\sqrt{2}$ і двокрокового методу Курчатова ($a = 1,\ b = -1$).

References

[1] Chen J., Shen Z. *Convergence analysis of the secant type method*. Appl. Math. Comp. 2007, **188**, 514–524.

[2] Lukšan L. *Inexact trust region method for large sparse systems of nonlinear equations*. J. of Optimization Theory and Appl. 1994, **81** (3), 385–387.

[3] Shakhno S.M. Difference and parametric iterative methods for solving nonlinear problems. Thesis of PhD dissertation. Kyiv, 2012. (in Ukrainian)

[4] Shakhno S.M., Grab S.I., Yarmola H.P. *Twoparametric secant type methods for solving nonlinear equations*. Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Computer Sci. 2009, **15**, 117–127. (in Ukrainian)

[5] Ulm S.Yu. *On iterative methods with successive approximation of the inverse operator*. Proc. of the Academy of Sci. of the Estonian SSR. Physics. Mathematics. 1967, **16** (4), 403–411. (in Russian)

[6] Vaarmann O. *On some iterative methods with successive approximation of the inverse operator. I.* Proc. of the Academy of Sci. of the Estonian SSR. Physics. Mathematics. 1968, **17** (4), 379–387. (in Russian)

[7] Vaarmann O. *On some iterative methods with successive approximation of the inverse operator. II.* Proc. of the Academy of Sci. of the Estonian SSR. Physics. Mathematics. 1969, **18** (1), 14–21. (in Russian)

[8] Wang X. *Convergence of Newton's method and uniquiness of the solution of equations in Banach space*. IMA J. of Numerical Analysis 2000, **20**, 123–134.

Надійшло 11.07.2012

Shakhno S.M., Yarmola H.P. *Two-step secant type method with approximation of the inverse operator*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 150–155.

The two-step secant type method with a consistent approximation of the inverse operator for solving nonlinear equations is proposed. The local convergence of the proposed method is studied and the quadratic convergence order is established. A numerical experiment is made on the test problems.

Key words and phrases: approximation of the inverse operator, secant type method, convergence order.

Шахно С.М., Ярмола Г.П. *Двухшаговый метод типа хорд с аппроксимацией обратного оператора* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 150–155.

Предложено двухшаговый метод типа хорд с последовательной аппроксимацией обратного оператора для решения нелинейных уравнений. Исследовано локальную сходимость предложенного метода и установлено квадратический порядок сходимости. На тестовых задачах проведено численный эксперимент.

Ключевые слова и фразы: аппроксимация обратного оператора, метод типа хорд, порядок сходимости.