ISSN 2075-9827 **http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp**
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 70–78 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.70–78
doi:10.15330/cmp.5.1.70-78

Лещенко Ю.Ю., Зоря Л.В.

ОЦЕНКИ ДИАМЕТРОВ ГРАФОВ КОММУТАТИВНОСТИ СИЛОВСКИХ p-ПОДГРУПП СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

Графом коммутативности конечной неабелевой группы G называется граф, вершины которого — нецентральные элементы группы G и две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = yx$. В статье изучаются свойства графов коммутативности силовских p-подгрупп симметрических групп. Установлены условия связности соответствующих графов, а также даны оценки диаметров для связных графов.

Ключевые слова и фразы: граф коммутативности, сплетение групп подстановок, силовская p-подгруппа, симметрическая группа.

Bogdan Khmelnytsky Cherkasy National University, 81 Shevchenka blvd., 18031, Cherkasy, Ukraine
E-mail: ylesch@ua.fm (Лещенко Ю.Ю.), zorialv@gmail.com (Зоря Л.В.)

Введение

Граф без петель и кратных ребер, вершинами которого являются нецентральные элементы неабелевой группы G и две вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда они коммутируют, называется графом коммутативности (англ. commuting graph) группы G. Дополнение к графу коммутативности называется графом некоммутативности. Можно изучать разные аспекты влияния свойств данных графов на строение группы.

Один из естественных вопросов: какие общие свойства сохраняют группы, имеющие изоморфные графы коммутативности? Например, известно, что если G — конечная неабелева нильпотентная группа, группы G и H имеют изоморфные графы коммутативности и одинаковые порядки, то H также нильпотентна [1]. В то же время граф коммутативности не определяет порядок конечной группы, т. е. существуют конечные группы разных порядков с изоморфными графами коммутативности (соответствующий пример приведен в [10]).

Отдельный интерес представляет изучение свойств самих графов коммутативности (или их дополнений) для разных классов конечных групп. С этой точки зрения, как правило, исследуются связность графов коммутативности и некоторые их числовые характеристики (например, диаметр или кликовое число). В частности, авторами статьи [6]

УДК 512.54
2010 *Mathematics Subject Classification:* 20B35, 20D20, 20E22, 20G15.

в 2008 году сформулировано следующие предположение: существует такое натуральное число d, что если конечная неабелева группа имеет связный граф коммутативности, то диаметр данного графа не превышает d. Данное предположение опровергнуто в 2012 году путем построения бесконечного семейства специальных конечных 2-групп, имеющих связные графы коммутативности как угодно большого диаметра [7]. Следует заметить, что аналогичное утверждение в классе полугрупп тоже неверно, т. е. существуют полугруппы со связными графами коммутативности как угодно большого диаметра [5]. Критерии связности графов коммутативности, а также оценки диаметров связных графов представлены, например, в [6] (для симметрических и знакопеременных групп), [2], [3], [4] (для некоторых классов линейных групп).

В данной статье изучаются свойства графов коммутативности силовских p-подгрупп симметрических групп. В первом разделе представлены необходимые вспомогательные сведения. Во втором — определены условия связности графов коммутативности итерированных сплетений циклических групп простого порядка, а также силовских p-подгрупп конечных симметрических групп, даны оценки диаметров для связных графов коммутативности. Основные результаты:

1) *граф коммутативности группы* $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p$ *несвязный* (теорема 2);

2) *при* $n \geq 3$ *граф коммутативности группы* $\wr_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_p$ *связный и его диаметр не превышает* 4 (теорема 3);

3) *если граф коммутативности силовской p-подгруппы симметрической группы связный, то его диаметр не превышает* 4 (теорема 4).

1 Необходимые вспомогательные сведения

1.1. *Силовская p-подгруппа симметрической группы* S_{p^n}, $n \in \mathbb{N}$. Символом $\mathbb{Z}_p$ будем обозначать поле вычетов по простому модулю p. Рассмотрим аддитивную группу $\mathbb{Z}_p$ и будем считать, что $\mathbb{Z}_p$ действует на себе правыми сдвигами, т. е. $x^a = x + a$, где x^a — образ x под действием a. Тогда *n-итерированное сплетение* группы $\mathbb{Z}_p$ (как группы подстановок)

$$\mathcal{P}_{p,n} = \underbrace{\mathbb{Z}_p \wr \ldots \wr \mathbb{Z}_p}_{n} = \wr_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_p^{(i)}, \quad \mathbb{Z}_p^{(i)} \simeq \mathbb{Z}_p,$$

можно определить как группу, элементы которой — это всевозможные таблицы вида

$$[a_1, a_2(x_1), \ldots, a_n(x_1, \ldots, x_{n-1})], \tag{1}$$

где $a_1 \in \mathbb{Z}_p$, $a_i(x_1, \ldots, x_{i-1}) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_{i-1}]/\langle x_1^p - x_1, \ldots, x_{i-1}^p - x_{i-1}\rangle$ ($a_i(x_1, \ldots, x_{i-1})$ — приведенный по модулю идеала $\langle x_1^p - x_1, \ldots, x_{i-1}^p - x_{i-1}\rangle$ многочлен над $\mathbb{Z}_p$). Таблицы из $\mathcal{P}_{p,n}$ действуют на $\mathbb{Z}_p^n$ следующим образом: если $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}_p^n$ и u — таблица вида (1), то

$$t^u = (t_1 + a_1, t_2 + a_2(t_1), \ldots, t_n + a_n(t_1, \ldots, t_{i-1})). \tag{2}$$

Группа $\mathcal{P}_{p,n}$ изоморфна силовской p-подгруппе симметрической группы S_{p^n} степени p^n (см., напр., [11], стр. 104-105, теорема 3.3.3). Строение $\mathcal{P}_{p,n}$ детально изучено в [9]. В частности, имеет место следующие утверждение (доказательство можно найти в [11], с. 115, теорема 3.4.8).

Предложение 1.1. *Центр группы $\mathcal{P}_{p,n}$ — циклическая группа порядка p, состоящая из всевозможных таблиц вида $[0,\dots,0,a]$, где $a \in \mathbb{Z}_p$.*

Введем дополнительные обозначения. Пусть $[u]_i = a_i(\overline{x}_{i-1}) = a_i(x_1,\dots,x_{i-1})$ называется *i-й координатой* (или *i-м координатным многочленом*) таблицы u, $[a_i(\overline{x}_{i-1})]_{i=1}^n$ будет сокращенным обозначением для таблиц вида (1), а $u_k = [a_1, a_2(\overline{x}_1),\dots,a_k(\overline{x}_{k-1})]$ — *k-м отрезком таблицы u* ($k \le n$). Символом $f(\overline{x}_k^{u_k})$ обозначим многочлен, который получается после приведения многочлена $f(\dots,x_i + a_i(x_1,\dots,x_{i-1}),\dots)$. Тогда, согласно действию (2) группы $\mathcal{P}_{p,n}$ на $\mathbb{Z}_p^n$, если $u = [a_i(\overline{x}_{i-1})]_{i=1}^n$ и $v = [b_i(\overline{x}_{i-1})]_{i=1}^n$, то

$$uv = [a_i(\overline{x}_{i-1}) + b_i(\overline{x}_{i-1}^{u_{i-1}})]_{i=1}^n. \tag{3}$$

Нам будут необходимы следующие свойства многочленов и таблиц.

Лемма 1.1 ([9], лемма 5). *Пусть $u \in \mathcal{P}_{p,n}$. Приведенный многочлен $a(\overline{x}_k)$ будет решением уравнения $f(\overline{x}_k^{u_k}) - f(\overline{x}_k) = 0$ тогда и только тогда, когда функция $a(\overline{x}_k)$ постоянна на областях транзитивности таблицы u_k. В частности, если u_k имеет порядок p^k, т. е. u_k действует транзитивно на $\mathbb{Z}_p^k$, то единственным решением будет $a(\overline{x}_k) = const \in \mathbb{Z}_p$.*

1.2. *Унитреугольная группа матриц.* Пусть $GL_n(\mathbb{F})$ — полная линейная группа над полем $\mathbb{F}$. Матрица $A = (a_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{F})$ называется *унитреугольной* (верхней унитреугольной), если $a_{ij} = \delta_{ij}$ при $i \ge j$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Центр группы $UT_n(\mathbb{F})$ — это циклическая группа, состоящая из унитреугольных матриц $A = (a_{ij})$, для которых $a_{ij} = 0$ при $0 < j - i < n-1$. Другими словами, элементы $\mathcal{Z}(UN_n(\mathbb{F}))$ — это унитреугольные матрицы с $n-2$ нулевыми диагоналями над главной (при этом a_{1n} — произвольный элемент поля $\mathbb{F}$).

1.3. *Силовские p-подгруппы симметрических групп.* Пусть $n \in \mathbb{N}$, p — простое число, S_n — симметрическая группа степени n (группа всех биекций на множестве из n элементов).

Теорема 1. *Если $n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m$ $(0 \le a_i < p,\ i = \overline{1,m})$ — представление натурального числа n в системе исчисления по основанию p, то силовская p-подгруппа симметрической группы степени n изоморфна прямому произведению $\mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \times \mathcal{P}_{p,2}^{a_2} \times \dots \times \mathcal{P}_{p,m}^{a_m}$ силовских p-подгрупп симметрических групп степеней $p, p^2, \dots, p^m$.*

Доказательство см., напр. [11], стр. 104 (следствие 3.3.2).

1.4. *Граф коммутативности неабелевой группы.* Пусть G — некоммутативная группа с центром $\mathcal{Z}(G)$. Рассмотрим неориентированный граф $\Gamma(G)$ с множеством вершин $V_\Gamma = G \setminus \mathcal{Z}(G)$. Две различные вершины $x, y \in V_\Gamma$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $xy = yx$ (x и y перестановочны в G). Граф $\Gamma(G)$ называется *графом коммутативности* группы G.

Напомним, что две вершины называются связными в некотором графе, если существует путь, соединяющий эти вершины. Бинарное отношение связности является отношением эквивалентности и разбивает множество вершин графа на классы, которые называют *компонентами связности*. Граф называется *связным*, если он имеет всего одну компоненту связности.

Расстоянием $\rho_\Gamma(x,y)$ между двумя вершинами x, y в графе Γ называется длина кратчайшего пути, соединяющего вершины x и y. *Диаметром* конечного связного графа Γ

называется величина $\mathrm{diam}(\Gamma) = \max\{\rho_\Gamma(x,y) \mid x, y \in V_\Gamma\}$. Если x и y принадлежат разным компонентам связности графа Γ, то будем считать, что $\rho_\Gamma(x,y) = \infty$. Диаметр несвязного графа также считается равным ∞. Тот факт, что x и y соединены ребром в $\Gamma(G)$ ($\rho_\Gamma(x,y) = 1$) или элементы x, y коммутируют в группе G ($xy = yx$), будем обозначать следующим образом: $x \sim y$.

Лемма 1.2 ([8], теорема 1.2). *Пусть* $G = A \times B$.

1) Если A и B — неабелевы группы, то $\mathrm{diam}(\Gamma_G) \leq \min\{3, d(\Gamma_A), d(\Gamma_B)\}$.

2) Если одна из групп A или B (например, B) — абелева, то $\mathrm{diam}(\Gamma_G) = d(\Gamma_A)$.

Оценку, данную в пункте 1) леммы 1.2, можно уточнить.

Следствие 1.1. *Если A и B — неабелевы группы и граф коммутативности каждой из них имеет диаметр не меньше 3, то* $\mathrm{diam}(\Gamma(A \times B)) = 3$.

Лемму 1.2 и следствие 1.1 можно обобщить на произвольное конечное число сомножителей.

2 Основные результаты

2.1. *Граф коммутативности группы* $\wr_{i=1}^n \mathbb{Z}_p$. Строение графа коммутативности группы $\mathcal{P}_{p,n} = \wr_{i=1}^n \mathbb{Z}_p$ существенным образом зависит от кратности сплетения. Рассмотрим сначала случай сплетения двух циклических групп простого порядка: $\mathcal{P}_{p,2} = \mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p$.

Теорема 2. *Граф коммутативности группы $\mathcal{P}_{p,2} = \mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p$ несвязный.*

Доказательство. Базой сплетения $\mathcal{P}_{p,2}$ является подгруппа B, состоящая из всевозможных таблиц вида $[0, a_2(x_1)]$, где $a_2(x_1) \in \mathbb{Z}_p[x_1]/\langle x_1^p - x_1\rangle$. Докажем, что элементы из $B \setminus \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,2})$ ($\mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,2})$ — центр группы $\mathcal{P}_{p,2}$, который состоит из таблиц вида $[0, a]$, где $a \in \mathbb{Z}_p$) перестановочны в $\mathcal{P}_{p,2}$ только с элементами из B.

Пусть $u = [0, a_2(x_1)] \in B \setminus \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,2})$, $v = [b_1, b_2(x_1)] \in \mathcal{P}_{p,2}$. Тогда

$$uv = [b_1, a_2(x_1) + b_2(x_1)], \qquad vu = [b_1, b_2(x_1) + a_2(x_1 + b_1)].$$

Откуда $a_2(x_1) = a_2(x_1 + b_1)$ для всех $x_1 \in \mathbb{Z}_p$. Возможны два случая.

Случай 1. Если $b_1 \neq 0$, то $a_2(x_1) = \mathrm{const}$ и $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,2})$ — противоречие.

Случай 2. Если $b_1 = 0$, то $v \in B$. □

Теорема 3. *При $n \geq 3$ граф коммутативности группы $\mathcal{P}_{p,n}$ связный и* $\mathrm{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})) \leq 4$.

Доказательство. Пусть таблица $u = [a_i(\overline{x}_{i-1})]_{i=1}^n$ — произвольный нецентральный элемент группы $\mathcal{P}_{p,n}$ (по предложению 1.1 центр группы $\mathcal{P}_{p,n}$ состоит из всевозможных таблиц вида $[0, \ldots, 0, a]$, $a \in \mathbb{Z}_p$). Зафиксируем таблицу $w = [0, \ldots, 0, x_1] \in \mathcal{Z}_2(\mathcal{P}_{p,n}) \setminus \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,n})$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в $\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})$ существует путь от u до w, длина которого не превышает 2.

Случай 1. Пусть $a_1 = 0$ и $u = [0, a_2(\overline{x}_1), \ldots, a_n(\overline{x}_{n-1})]$. Непосредственные вычисления показывают, что $uw = wu$, т. е. в $\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})$ существует путь $u \sim w$ длины 1.

Случай 2. Пусть $a_1 \neq 0$. Возможны следующие варианты.

Случай 2.1: $u^p \notin \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,n})$. Тогда u^p имеет нулевую первую координату. Так как $u \sim u^p$ и $u^p \sim w = [0, \ldots, 0, x_1]$, то $\rho_{\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})}(u, w) \leq 2$.

Случай 2.2: $u^p \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,n})$. Тогда $|u| \leq p^2$, так как центр — циклическая подгруппа порядка p. Более того, поскольку $u^p = [0, \ldots, 0, a]$, то $u_{n-1}^p = [0, \ldots, 0]$, т. е. u_{n-1} имеет порядок p.

Рассмотрим таблицу $z = [0, \ldots, 0, f_n(\overline{x}_{n-1})]$. Тогда

$$\begin{aligned} uz &= [a_1, a_2(\overline{x}_1), \ldots, a_{n-1}(\overline{x}_{n-2}), a_n(\overline{x}_{n-1}) + f_n(\overline{x}_{n-1}^{u_{n-1}})], \\ zu &= [a_1, a_2(\overline{x}_1), \ldots, a_{n-1}(\overline{x}_{n-2}), f_n(\overline{x}_{n-1}) + a_n(\overline{x}_{n-1})]. \end{aligned}$$

Для того, чтобы $uz = zu$ необходимо выполнение равенства $a_n(\overline{x}_{n-1}) + f_n(\overline{x}_{n-1}^{u_{n-1}}) = f_n(\overline{x}_{n-1}) + a_n(\overline{x}_{n-1})$ или

$$f_n(\overline{x}_{n-1}^{u_{n-1}}) - f_n(\overline{x}_{n-1}) = 0. \tag{4}$$

Так как u_{n-1} имеет порядок p, то ее области транзитивности на $\mathbb{Z}_p^{n-1}$ имеют размер не превосходящий p. С другой стороны, по условию теоремы $n \geq 3$ (т. е. $n - 1 \geq 2$) и множество $\mathbb{Z}_p^{n-1}$ содержит не менее p^2 элементов. Значит, u_{n-1} имеет более одной орбиты (области транзитивности). Следовательно, по лемме 1.1 уравнение (4) имеет решения, отличные от константы.

Таким образом, найдется такое z, что $z \notin \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,n})$, $zu = uz$ и первая координата z равна 0. Значит, в $\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})$ существует путь $u \sim z \sim w = [0, \ldots, 0, x_1]$ длины 2.

Итак, любая таблица из $\mathcal{P}_{p,n} \setminus \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,n})$ соединяется в графе коммутативности $\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})$ с таблицей $w = [0, \ldots, 0, x_1]$ путем, длина которого не превышает 2. Следовательно, $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})) \leq 4$. □

Лемма 2.1. *Если* $\operatorname{diam}(\Gamma(G)) \geq 3$*, то* $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathbb{Z}_p \wr G)) \geq 3$.

Доказательство. Напомним, что

$$\mathbb{Z}_p \wr G = \{[g, h(x)] \mid g \in \mathbb{Z}_p, h(x) : \mathbb{Z}_p \to G\}.$$

Пусть $a, b \in G \setminus \mathcal{Z}(G)$, $\rho_{\Gamma(G)}(a, b) \geq 3$ и

$$a(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x = 0, \\ 1_G, & \text{если } x \neq 0; \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x = 0, \\ 1_G, & \text{если } x \neq 0; \end{cases}$$

где 1_G — нейтральный елемент группы G.

Предположим, что в $\Gamma(\mathbb{Z}_p \wr G)$ расстояние между элементами $u = [1, a(x)]$ и $v = [1, b(x)]$ меньше 3. Очевидно, что $uv \neq vu$, так как из $u \sim v$ следует, что $a \sim b$ в G. Пусть в $\mathbb{Z}_p \wr G$ существует таблица $w = [c, d(x)]$ такая, что $u \sim w \sim v$ (т. е. $\rho_{\Gamma(\mathbb{Z}_p \wr G)}(u, v) = 2$). Тогда из равенства $uw = wu$ (в частности, $[uw]_2 = [wu]_2$) по правилу умножения таблиц следует

$$a(x) \cdot d(x+1) = d(x) \cdot a(x+c) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{Z}_p. \tag{5}$$

Аналогично из $vw = wv$ следует

$$b(x) \cdot d(x+1) = d(x) \cdot b(x+c) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{Z}_p. \tag{6}$$

Возможны два случая.

Случай 1. Если $c = 0$, то при всех $x \neq 0$ равенство (5) принимает вид $d(x) = d(x+1)$. Это означает, что $d(1) = d(2) = \ldots = d(p) = d(0)$, т. е. $d(x) = d \in G$ при всех $x \in \mathbb{Z}_p$. При $x = 0$ равенство (5) принимает вид $ad = da$, то есть $a \sim d$ в G. Аналогично, из равенства (6) при $x = 0$ следует, что $d \sim b$ в G. Так как $\rho_{\Gamma(G)}(a,b) \geq 3$, то $d \in \mathcal{Z}(G)$. Но тогда $w \in \mathcal{Z}(\mathbb{Z}_p \wr G)$.

Случай 2. Если $c \neq 0$, то при $x = 0$ из (5) и (6) следует соответственно $a \cdot d(1) = d(0)$ и $b \cdot d(1) = d(0)$. Откуда получаем $a \cdot d(1) = b \cdot d(1)$ или $a = b$, что противоречит выбору элементов a и b. □

Предложение 2.1. $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,n})) \geq 3$.

Доказательство. Рассмотрим группу $\mathcal{P}_{p,2} = [g, h(x) \mid g \in \mathbb{Z}_p, h(x) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p]$. Пусть $u = [1, x^{p-1}]$ и $v = [1,1]$. Покажем, что $\rho(u,v) > 2$.

Действительно, если $[a, b(x)] \sim v$, то $b(x+1) = b(x)$ при всех $x \in \mathbb{Z}_p$. Другими словами, v перестановочна только с таблицами вида $w = [a,b]$, где $a, b \in \mathbb{Z}_p$. С другой стороны, если $w \sim u$, то $b + (x+a)^{p-1} = x^{p-1} + b$ или $(x+a)^{p-1} = x^{p-1}$ при всех $x \in \mathbb{Z}_p$. Последнее возможно только, когда $a = 0$. Но тогда $w \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{p,2})$. Следовательно, $\rho(u,v) > 2$.

Применив метод математической индукции и лему 2.1, получаем нужное нам утверждение. □

Верхняя оценка диаметров итерированных сплетений, данная в теореме 3, не может быть улучшена, про что свидетельствует следующий пример.

Пример 1. *Пусть* $u = [1, x_1, x_1x_2]$ *и* $v = [1, 1, x_1x_2]$. *Тогда* $\rho_{\Gamma(\mathcal{P}_{2,3})}(u,v) = 4$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $uv \neq vu$. Путь $u_0 \in \mathcal{P}_{2,3}$ такая, что $u_0 \sim u$. Тогда, сравнивая соответствующие координатные многочлены таблиц uu_0 и u_0u, получаем ограничения:

$$u_0 = [a, b + ax_1, c + abx_1 + bx_2 + ax_1x_2], \quad \text{где } a, b, c \in \mathbb{Z}_2.$$

Аналогично, если v_0 перестановочна с v, то

$$v_0 = [l, l, d + kx_1 + kx_2 + lx_1x_2], \quad \text{где } d, k, l \in \mathbb{Z}_2.$$

Если $u_0v_0 = v_0u_0$, то из равенства вторых координатных многочленов таблиц u_0v_0 и v_0u_0 следует, что $al = 0$. Возможны два случая.

Случай 1. Если $a = 0$, то $u_0 = [0, b, c + bx_2]$. Сравнивая третьи координатные многочлены u_0v_0 и v_0u_0 получаем, что либо $b = 0$ (и тогда $u_0 \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{2,3})$), либо $b \neq 0$ (но тогда $k = l = 0$ и $v_0 \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{2,3})$).

Случай 2. Если $l = 0$, то $v_0 = [0, 0, d + kx_1 + kx_2]$. Тогда из равенства третьих координатных многочленов таблиц u_0v_0 и v_0u_0 следует, что $k = 0$. Т. е. $v_0 \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_{2,3})$. □

В группе $\mathcal{P}_{p,n}$ естественным образом выделяется подгруппа, состоящая из тех и только тех таблиц, координатные многочлены которых — однородные линейные полиномы. Эта подгруппа изоморфна группе $UT_n(\mathbb{Z}_p)$ унитреугольных матриц над полем $\mathbb{Z}_p$. Условия связности графов коммутативности унитреугольных групп над полем вычетов $\mathbb{Z}_p$ (p — простое), а также оценки их диаметров приведены в [8]. Если $n \geq 4$, то граф коммутативности группы $UT_n(\mathbb{Z}_p)$ связный и имеет диаметр равный 3, а граф коммутативности группы $UT_3(\mathbb{Z}_p)$ — несвязный (см. [8], утверждение 4.1).

Рассмотрим строение графа $\Gamma(UT_3(\mathbb{F}))$, где $\mathbb{F}$ — произвольное конечное поле, более детально.

Пример 2. *Если $\mathbb{F}$ — конечное поле и $|\mathbb{F}| = q$, то граф коммутативности $\Gamma(UT_3(\mathbb{F}))$ группы $UT_3(\mathbb{F})$ несвязный и имеет $q+1$ компоненту связности, каждая из которых — полный подграф на $q^2 - q$ вершинах;*

Доказательство. Пусть $A, B \in UT_3(\mathbb{F})$:

$$A = E + \underbrace{a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{23}E_{23}}_{\Sigma_a} \quad \text{и} \quad B = E + \underbrace{b_{12}E_{12} + b_{13}E_{13} + b_{23}E_{23}}_{\Sigma_b},$$

где E — единичная матрица, E_{ij} — матричная единица (т. е. нулевая матрица, с 1 на пересечении i-й строки и j-го столбца).

Случай 1. Если $a_{12} = 0$ и $a_{23} \neq 0$, то

$$AB = E + \Sigma_b + a_{13}E_{13} + a_{23}E_{23}, \qquad BA = E + \Sigma_b + a_{13}E_{13} + a_{23}E_{23} + a_{23}b_{12}E_{13}.$$

Тогда из $AB = BA$ следует, что $a_{23}b_{12} = 0$, т. е. $b_{12} = 0$. Это означает, что матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{где } * \text{ — произвольный элелемент поля } \mathbb{F}, \tag{7}$$

перестановочны только с матрицами вида (7). Множество таких матриц, за исключением матриц принадлежащих центру группы (центр группы $UT_3(\mathbb{F})$ содержит q элементов), формирует компоненту связности $\mathcal{C}_0$ в $\Gamma(UT_3(F))$, $|\mathcal{C}_0| = q^2 - q$.

Случай 2. Аналогично, если $a_{12} \neq 0$ и $a_{23} = 0$, то матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{где } * \text{ — произвольный элелемент поля } \mathbb{F},$$

(за исключением центра) образуют еще одну компоненту связности $\mathcal{C}_q$, $|\mathcal{C}_0| = |\mathcal{C}_q|$.

Случай 3. Если $a_{12} \neq 0$ и $a_{23} \neq 0$, то

$$AB = E + \Sigma_b + \Sigma_b + a_{12}b_{23}E_{13} \quad \text{и} \quad BA = E + \Sigma_b + \Sigma_b + b_{12}a_{23}E_{13}.$$

Из условия $AB = BA$ следует, что $a_{23}b_{12} = b_{23}a_{12}$. Если $b_{12} = 0$, то и $b_{23} = 0$. Это означает, что $B \in \mathcal{Z}(UT_3(\mathbb{F}))$. Если $b_{12} \neq 0$ и $b_{23} \neq 0$, то

$$\frac{a_{12}}{a_{23}} = \frac{b_{12}}{b_{23}} = k \neq 0. \tag{8}$$

Т. е. матрицы с двумя ненулевыми элементами над главной диагональю перестановочны только с матрицами, соответствующие элементы которых удовлетворяют (8). Матрицы такого вида формируют компоненту связности $\mathcal{C}_k$, $k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, где $|\mathcal{C}_k| = q^2 - q$. Число таких компонент связности равно $q - 1$ (по числу ненулевых элементов поля $\mathbb{F}$).

Таким образом, общее количество компонент связности равно $q + 1$. □

2.2. *Граф коммутативности силовских p-подгрупп симметрических групп*. Оценки диаметров графов коммутативности силовских p-подгрупп симметрических групп представлены в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{P}$ — силовская p-подгруппа группы S_n. Тогда*

1) *если $n < p^2$, то $\mathcal{P}$ — абелева группа;*

2) *если $p^2 \leq n < 2p^2$, то граф коммутативности $\Gamma(\mathcal{P})$ группы $\mathcal{P}$ несвязный;*

3) *если $n = a_0 + a_1 p + p^k$, где $0 \leq a_0, a_1 < p$, а $k \geq 3$, то граф коммутативности $\Gamma(\mathcal{P})$ группы $\mathcal{P}$ связный и $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P})) \leq 4$;*

4) *иначе — граф коммутативности $\Gamma(\mathcal{P})$ группы $\mathcal{P}$ связный и $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P})) = 3$.*

Доказательство. 1) Если $n < p^2$, то $n = a_0 + a_1 p$, где $0 \leq a_0, a_1 < p$. По теореме 1 силовская p-подгруппа группы S_n изоморфна прямому произведению $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \simeq \mathbb{Z}_p^{a_1}$ — абелева группа.

2) Если $p^2 \leq n < 2p^2$, то $n = a_0 + a_1 p + p^2$, где $0 \leq a_0, a_1 < p$. По теореме 1 силовская p-подгруппа группы S_n изоморфна прямому произведению $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \times \mathcal{P}_{p,2}$. По лемме 1.2

$$\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P})) = \operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \times \mathcal{P}_{p,2})) = \operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,2})) = \infty,$$

т. е., граф $\Gamma(\mathcal{P})$ — несвязный.

3) Если $n = a_0 + a_1 p + p^k$, где $0 \leq a_0, a_1 < p$, а $k \geq 3$, то $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \times \mathcal{P}_{p,k}$ и

$$\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P})) = \operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,1}^{a_1} \times \mathcal{P}_{p,k})) = \operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P}_{p,k})) \leq 4.$$

4) В остальных случаях $\mathcal{P}$ будет представлена прямым произведением как минимум двух неабелевых подгрупп, диаметры графов коммутативности которых (согласно предложению 2.1) не меньше 3. Используя следствие 1.1, получаем $\operatorname{diam}(\Gamma(\mathcal{P})) = 3$. □

3 Выводы и обсуждения

Гипотеза о существовании ограничения на величину диаметров графов коммутативности косвенно подтверждалась наличием такого предела в классах многих конечных групп [2], [3], [4], а также ограниченностью диаметров соответствующих графов для симметрических групп [6]. Аналогичная ситуация возникает при изучении p-групп: диаметры графов коммутативности силовских p-подгрупп симметрических групп не превышают 4 (теоремы 3 и 4), но при этом все подгруппы бесконечной серии (предложенной в [7]) с возрастающими диаметрами являются 2-группами (нильпотентными класса 2). Многие классы подгрупп группы $\mathcal{P}_{p,n}$ описаны детально (например, в терминах таблиц [9]). Поэтому возникает естественная проблема поиска тех условий, при которых классы подгрупп группы $\mathcal{P}_{p,n}$ будуть иметь ограничения на величину диаметров соответствующих графов коммутативности.

References

[1] Abdollahi A., Akbari S., Maimani H.R. *Non-commuting graph of a group*. J. Algebra 2006, **298** (2), 468–492. doi:10.1016/j.jalgebra.2006.02.015

[2] Akbari S., Bidkhori H., Mohammadian A. *Commuting Graphs of matrix algebras*. Comm. in Algebra 2008, **36** (11), 4020–4031. doi:10.1080/00927870802174538

[3] Akbari S., Mohammadian A., Radjavi H., Raja P. *On the diameters of commuting graphs*. Linear Algebra Appl. 2006, **418** (1), 161–176. doi:10.1016/j.laa.2006.01.029

[4] Akbari S., Raja P. *Commuting graphs of some subsets in simple rings*. Linear Algebra Appl. 2006, **416** (2–3), 1038–1047. doi:10.1016/j.laa.2006.01.006

[5] Araujo J., Kinyon M., Konieczny J. *Minimal paths in the commuting graphs of semigroups*. Eur. J. Comb. 2011, **32** (2), 178–197. doi:10.1016/j.ejc.2010.09.004

[6] Iranmanesh A., Jafarzadeh A. *On the commuting graph associated with the symmetric and alternating groups*. J. Algebra Appl. 2008, **7** (1), 129–146. doi:10.1142/S0219498808002710

[7] Giudici M., Parker C. There is no upper bound for the diameter of the commuting graph of a finite group. arXiv 2012. http://arxiv.org/abs/1210.0348v1

[8] Guidici M., Pope A. On bounding the diameter of the commuting graph of a group. arXiv 2012. http://arxiv.org/abs/1206.3731v2

[9] Kaloujnine L. *La structure des p-groupes de Sylow des groupes symetriques finis*. Ann. Sci. l'Ecole Norm. Super. 1948, **65** (3), 239–276.

[10] Moghaddamfar A.R. *About noncommuting graphs*. Siberian Math. J. 2006, **47** (5), 911–914. doi:10.1007/s11202-006-0101-y

[11] Sushchansky V.I., Sikora V.S. Operations on the permutation groups. Ruta, Chernivci, 2003. (in Ukrainian)

Поступило 29.06.2012

Leshchenko Yu.Yu., Zoria L.V. *On diameters estimations of the commuting graphs of Sylow p-subgroups of the symmetric groups*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 70–78.

The commuting graph of a group G is an undirected graph whose vertices are non-central elements of G and two distinct vertices x, y are adjacent if and only if $xy = yx$. This article deals with the properties of the commuting graphs of Sylow p-subgroups of the symmetric groups. We define conditions of connectedness of respective graphs and give estimations of the diameters if graph is connected.

Key words and phrases: commuting graph, wreath product, Sylow p-subgroup, symmetric group.

Лещенко Ю.Ю., Зоря Л.В. *Оцінки діаметрів графів комутативності силовських p-підгруп симетричних груп* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №1. — С. 70–78.

Графом комутативності скінченної неабелевої групи G називається граф, вершинами якого є нецентральні елементи групи G та дві різні вершини x, y з'єднуються ребром тоді і тільки тоді, коли $xy = yx$. У статті досліджено властивості графів комутативності силовських p-підгруп симетричних груп. Встановлені умови зв'язності відповідних графів, а також наведені оцінки діаметрів для зв'язних графів.

Ключові слова і фрази: граф комутативності, вінцевий добуток груп підстановок, силовська p-підгрупа, симетрична група.