ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 50–58 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.50–58
doi:10.15330/cmp.5.1.50-58

Захарко Ю.Б.[1], Філевич П.В.[2]

ЗРОСТАННЯ КАНОНІЧНИХ ДОБУТКІВ ВЕЙЄРШТРАССА НУЛЬОВОГО РОДУ З ВИПАДКОВИМИ НУЛЯМИ

Нехай $\zeta = (\zeta_n)$ — комплексна послідовність нульового роду з показником збіжності τ, $N(r)$ — її усереднена лічильна функція, $\pi(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right)$ — канонічний добуток Вейєрштрасса, а $M(r)$ — максимум модуля цього добутку. Відомо, що тоді виконується нерівність Валунда-Валірона

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{\ln M(r)} \geq w(\tau), \qquad w(\tau) := \frac{\sin \pi\tau}{\pi\tau},$$

і ця нерівність є точною. В роботі доведено, що для більшості (у ймовірнісному сенсі) послідовностей ζ сталу $w(\tau)$ в нерівності Валунда-Валірона можна замінити сталою $w\left(\frac{\tau}{2}\right)$.

Ключові слова і фрази: ціла функція, добуток Вейєрштрасса, максимум модуля, порядок, рід, показник збіжності, усереднена лічильна функція.

[1] Lviv National University of Veterinary Medicine and Biotechnologies, 50 Pekarska str., 79010, Lviv, Ukraine
[2] Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: yulia.zaharko@gmail.com (Захарко Ю.Б.), filevych@mail.ru (Філевич П.В.)

1 Вступ

Нехай $\mathbb{N}_0$ — множина невід'ємних цілих чисел, $\mathcal{Z}$ — клас комплексних послідовностей $\zeta = (\zeta_n)$ таких, що $0 < |\zeta_0| \leq |\zeta_1| \leq \ldots$ і $\zeta_n \to \infty$, $n \to \infty$, а $\mathcal{E}$ — клас трансцендентних цілих функцій. Для послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$ і числа $\tau \in [0;1]$ покладемо

$$C_\zeta = \left\{\alpha \in [0;+\infty) : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\zeta_n|^\alpha} = +\infty\right\}, \quad w(\tau) = \frac{\sin \pi\tau}{\pi\tau},$$

(вважаємо, що $w(0) = 1$).

Як звично (див. [4]), показник збіжності, рід, лічильну функцію і усереднену лічильну функцію послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}$ визначаємо відповідно за рівностями

$$\tau_\zeta = \sup C_\zeta, \qquad q_\zeta = \sup(C_\zeta \cap \mathbb{N}_0), \qquad n_\zeta(r) = \sum_{|\zeta_n| \leq r} 1, \qquad N_\zeta(r) = \int_0^r n_\zeta(t) \frac{dt}{t}.$$

Підклас послідовностей $\zeta \in \mathcal{Z}$ нульового роду ($q_\zeta = 0$) позначимо через $\mathcal{Z}_0$. Добре відомо, що якщо $\zeta \in \mathcal{Z}_0$, то канонічний добуток Вейєрштрасса

$$\pi(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) \tag{1}$$

УДК 517.53
2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D15, 30D20.

збігається абсолютно і рівномірно в кожному скінченному крузі, а тому задає цілу функцію $\pi \in \mathcal{E}$.

Для функції $f \in \mathcal{E}$ нехай $n_f(r,0)$ — лічильна функція нулів (кількість нулів у крузі $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$). Усереднену лічильну функцію нулів, максимум модуля і порядок функції f визначаємо відповідно за рівностями

$$N_f(r,0) = \int_0^r (n_f(t,0) - n_f(0,0))\frac{dt}{t} + n_f(0,0)\ln r,$$
$$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, \qquad \rho_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Використовуючи формулу Йєнсена (див. [4], с. 24])

$$N_f(r,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta - \ln|c_f(0)|,$$

де $c_f(0)$ — перший відмінний від нуля коефіцієнт з розкладу функції f у ряд Тейлора в околі точки $z = 0$, легко отримуємо нерівність

$$N_f(r,0) \leq \ln M_f(r) - \ln|c_f(0)|. \tag{2}$$

З іншого боку, правильна така класична теорема Валунда–Валірона (див. [7], [4, с. 571]).

Теорема 1. *Нехай $f \in \mathcal{E}$ — ціла функція порядку $\rho \in [0;1]$. Тоді*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_f(r,0)}{\ln M_f(r)} \geq w(\rho). \tag{3}$$

Зауважимо, що з (2) і (3) для функції $f \in \mathcal{E}$ нульового порядку маємо рівність

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_f(r,0)}{\ln M_f(r)} = 1.$$

Якщо ж $\rho_f = 1$, то нерівність (3) тривіальна ($w(1) = 0$) і перетворюється у рівність, наприклад, для функції $f(z) = e^z$, яка не має нулів ($N_f(r,0) = 0$).

У випадку $\rho_f < 1$ функція $f \in \mathcal{E}$ має нульовий рід, тобто послідовність ζ усіх відмінних від 0 нулів цієї функції, занумерованих з урахуванням кратностей у порядку неспадання їх модулів, є нульового роду і

$$f(z) = c_f(0)z^{n_f(0,0)}\pi(z), \tag{4}$$

де π — канонічний добуток Вейєрштрасса вигляду (1), побудований за послідовністю ζ (див. [4, с. 80]). Використовуючи зображення (4), очевидні співвідношення

$$M_f(r) = |c_f(0)|r^{n_f(0,0)}M_\pi(r), \quad n_f(r,0) = n_\zeta(r) + n_f(0,0), \quad N_f(r,0) = N_\zeta(r) + n_f(0,0)\ln r,$$

а також відомі факти теорії розподілу значень (див. теореми 1.8 і 3.4 з [4, гл. II]), для кожної функції $f \in \mathcal{E}$ нульового роду легко отримуємо рівності $\rho_f = \rho_\pi = \tau_\zeta$. З огляду на це, теорема 1 для таких функцій є рівносильною наступній.

Теорема 2. *Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ — послідовність з показником збіжності $\tau \in [0;1]$. Тоді для канонічного добутку Вейєрштрасса* (1) *правильна нерівність*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r)}{\ln M_\pi(r)} \geq w(\tau). \tag{5}$$

Нерівність (5) є точною, що випливає з такої теореми.

Теорема 3. *Нехай $\tau \in [0;1]$. Тоді існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ з $\tau_\zeta = \tau$ така, що для канонічного добутку Вейєрштрасса* (1) *правильна рівність*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r)}{\ln M_\pi(r)} = w(\tau).$$

Теорема 3 є також добре відомою [7]. Її доведення легко отримати, використовуючи міркування з [4, с. 74, 554–555]. Зауважимо, що з теореми 3 випливає точність нерівності (3) у випадку довільного $\rho \in [0;1]$.

У даній роботі покажемо, що у випадку $\tau \in (0;1]$ для більшості (у ймовірнісному сенсі) послідовностей $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ оцінку (5) можна істотно уточнити, тобто послідовностей, існування яких стверджується теоремою 3, є (у цьому ж сенсі) мало. Власне, далі розглядатимемо канонічні добутки Вейєрштрасса, побудовані за послідовностями випадкових величин, тобто канонічні добутки з випадковими нулями. Зазначимо, що деякі інші властивості цілих функцій з випадковими нулями розглядались у нашій роботі [8].

2 Формулювання основних результатів

Позначимо через Ξ клас послідовностей $\xi = (\xi_n(\omega))$ незалежних випадкових величин (взагалі кажучи, комплекснозначних), визначених на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, таких, що для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ маємо $\mathrm{M}\xi_n(\omega) = 0$ і майже напевно (м. н.) $|\xi_n(\omega)| = 1$ (тут M — знак математичного сподівання). До класу Ξ належать, наприклад, довільна послідовність Радемахера $(\varepsilon_n(\omega))$, тобто послідовність незалежних випадкових величин, що приймають значення -1 і 1 з ймовірністю $\frac{1}{2}$ кожне, а також довільна послідовність вигляду $(e^{2\pi i\omega_n(\omega)})$, де $(\omega_n(\omega))$ — послідовність Штейнгауза, тобто послідовність незалежних рівномірно розподілених на відрізку $[0;1]$ випадкових величин (див. [5]).

Нехай $\xi \in \Xi$, $\zeta \in \mathcal{Z}_0$, $\zeta_\omega = (\xi_n(\omega)\zeta_n)$. Зрозуміло, що тоді м. н. $n_{\zeta_\omega}(r) = n_\zeta(r)$, $N_{\zeta_\omega}(r) = N_\zeta(r)$ для всіх $r \geq 0$, $\tau_{\zeta_\omega} = \tau_\zeta$ і $\zeta_\omega \in \mathcal{Z}_0$. Поряд з канонічним добутком Вейєрштрасса (1) розглянемо випадковий канонічний добуток Вейєрштрасса

$$\pi_\omega(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\xi_n(\omega)\zeta_n}\right). \tag{6}$$

Правильна наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай $\xi \in \Xi$, а $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ — послідовність з показником збіжності $\tau \in [0;1]$. Тоді для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса* (6) *м. н. правильна нерівність*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r)}{\ln M_{\pi_\omega}(r)} \geq w\left(\frac{\tau}{2}\right). \tag{7}$$

Нерівність (7) у випадку, якщо $\xi_n(\omega) = \varepsilon_n(\omega)$, $n \in \mathbb{N}_0$, є точною, що випливає з такої теореми.

Теорема 5. *Нехай ξ — послідовність Радемахера, $\tau \in [0;1]$. Тоді існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ з $\tau_\zeta = \tau$ така, що для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса* (6) *м. н. правильна рівність*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r)}{\ln M_{\pi_\omega}(r)} = w\left(\frac{\tau}{2}\right). \tag{8}$$

Для доведення теорем 4 і 5 нам будуть потрібні деякі допоміжні результати, які наведено в наступних двох пунктах.

3 Допоміжні результати

Нехай $\rho \in [0;+\infty)$. Уточненим ρ-порядком називатимемо довільну невід'ємну неперервно диференційовну на $[0;+\infty)$ функцію $\rho(r)$, для якої $\rho(r) \to \rho$ і $\rho'(r) r \ln r \to 0$, якщо $r \to +\infty$.

Правильні наступні дві леми (див. [4, с. 70-72, 555]).

Лема 3.1. *Нехай $\lambda(r)$ — додатна неспадна необмежена на $[r_0, +\infty)$ функція така, що*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \lambda(r)}{\ln r} = \rho \in [0;+\infty).$$

Тоді існує уточнений ρ-порядок $\rho(r)$, для якого

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\lambda(r)}{r^{\rho(r)}} = 1.$$

Лема 3.2. *Нехай $\rho \in (0;1)$, $r_0 \in (0;+\infty)$ — фіксоване число, а $\rho(r)$ — довільний уточнений ρ-порядок. Тоді*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{r_0/r}^{+\infty} \frac{(rt)^{\rho(rt)}}{r^{\rho(r)}} \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{w(\rho)}.$$

Для послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ введемо позначення

$$G_\zeta(r) = \left(\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{r^2}{|\zeta_n|^2}\right)\right)^{1/2}.$$

Лема 3.3. *Нехай $\zeta \in \mathcal{Z}_0$. Тоді*

$$\ln G_\zeta(r) = \int_0^{+\infty} N_\zeta(r\sqrt{t}) \frac{dt}{(1+t)^2}.$$

Доведення. Наведена рівність тривіальна при $r = 0$.

Нехай $r > 0$. Оскільки для кожної послідовності $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ виконуються (див. [4, с. 79]) рівності

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{n_\zeta(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{N_\zeta(x)}{x} = 0$$

і $n_\zeta(x) = N_\zeta(x) = 0$ для $x \in [0; |\zeta_0|)$, то, переходячи до інтегралу Стілтьєса, двічі інтегруючи частинами і роблячи заміну $x = r\sqrt{t}$, маємо

$$\ln G_\zeta(r) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r^2}{|\zeta_n|^2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{r^2}{x^2}\right) dn_\zeta(x)$$
$$= \frac{1}{2} n_\zeta(x) \ln\left(1 + \frac{r^2}{x^2}\right)\Big|_0^{+\infty} + r^2 \int_0^{+\infty} \frac{n_\zeta(x)}{x}\frac{dx}{r^2 + x^2} = r^2 \int_0^{+\infty} (N_\zeta(x))'_+ \frac{dx}{r^2 + x^2}$$
$$= r^2 \int_0^{+\infty} \frac{dN_\zeta(x)}{r^2 + x^2} = r^2 \frac{N_\zeta(x)}{r^2 + x^2}\Big|_0^{+\infty} + r^2 \int_0^{+\infty} N_\zeta(x) \frac{2x dx}{(r^2 + x^2)^2} = \int_0^{+\infty} N_\zeta(r\sqrt{t}) \frac{dt}{(1+t)^2}.$$

Лему 3.3 доведено. □

Для цілої функції $f \in \mathcal{E}$ її середнє $S_f(r)$ визначимо за рівністю

$$S_f(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta\right)^{1/2}.$$

Лема 3.4. *Нехай $f \in \mathcal{E}$ — ціла функція скінченного порядку. Тоді*

$$\ln M_f(r) \sim \ln S_f(r), \qquad r \to +\infty. \tag{9}$$

Співвідношення (9) у випадку $\rho_f < +\infty$ випливає з добре відомого (див., наприклад, [6, с. 17]) співвідношення Бореля

$$\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r), \qquad r \to +\infty, \tag{10}$$

де $\mu_f(r) = \max\left\{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| r^n : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ — максимальний член степеневого розвинення функції f в околі точки $z = 0$, а також з нерівностей $\mu_f(r) \le S_f(r) \le M_f(r)$, друга з яких — очевидна, а першу легко отримати, врахувавши рівність Парсеваля

$$S_f^2(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|^2 r^{2n}.$$

Зауважимо, що необхідні і достатні умови виконання співвідношення (10) і його узагальнень отримано відповідно в [1, 3]. Необхідні і достатні умови виконання співвідношення (9) і його узагальнень знайдено в [2].

4 Оцінка середнього випадкового добутку Вейєрштрасса

Наступну теорему, в якій наведено оцінку зверху для середнього випадкового добутку Вейєрштрасса (6) через функцію $G_\zeta(r)$, використаємо при доведенні теореми 4.

Теорема 6. *Нехай $\xi \in \Xi$, $\zeta \in \mathcal{Z}_0$, а $\varphi(x)$ — додатна неспадна на $[x_0; +\infty)$ функція така, що $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\varphi(x)} < +\infty$. Тоді для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса* (6) *м. н. правильна нерівність*

$$S_{\pi_\omega}(r) < G_\zeta(r)\sqrt{\varphi(\ln G_\zeta(r))}, \quad r \ge r_0(\omega).$$

Доведення. Насамперед зауважимо, що для довільної випадкової величини η такої, що $\mathrm{M}\eta = 0$, маємо також рівність $\mathrm{M}\overline{\eta} = 0$. Крім того, якщо $|\eta| = 1$ м. н., то $\frac{1}{\eta} = \overline{\eta}$ м. н.

Зафіксуємо довільне $r \in (0, +\infty)$ і розглянемо випадкову величину $X(\omega) = S^2_{\pi_\omega}(r)$. Скориставшись теоремою Фубіні і незалежністю випадкових величин $\xi_n(\omega)$, отримуємо

$$\begin{aligned}\mathrm{M}X(\omega) &= \mathrm{M}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\pi_\omega(re^{i\theta})|^2 d\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{M}|\pi_\omega(re^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{M}\prod_{n=0}^{\infty}\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\xi_n(\omega)\zeta_n}\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\prod_{n=0}^{\infty}\mathrm{M}\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\xi_n(\omega)\zeta_n}\right|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\prod_{n=0}^{\infty}\mathrm{M}\left(1+\frac{r^2}{|\zeta_n|^2}-\frac{re^{i\theta}}{\zeta_n}\overline{\xi_n(\omega)}-\frac{re^{-i\theta}}{\overline{\zeta_n}}\xi_n(\omega)\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{r^2}{|\zeta_n|^2}\right)d\theta = G^2_\zeta(r).\end{aligned}$$

Оскільки випадкова величина $X(\omega)$ невід'ємна, то, використовуючи нерівність Чебишова, маємо

$$P(S_{\pi_\omega}(r) \geq \sqrt{\lambda}G_\zeta(r)) = P(X(\omega) \geq \lambda \mathrm{M}X(\omega)) \leq \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda > 0. \tag{11}$$

Зауважимо, що функція $G_\zeta(r)$ є зростаючою до $+\infty$ на $[0; +\infty)$ і $G_\zeta(0) = 1$. Тому для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ рівняння $\ln G_\zeta(r) = n$ має на $[0; +\infty)$ єдиний розв'язок. Позначимо цей розв'язок через r_n.

Покладемо $\psi(x) = \frac{1}{e^2}\varphi(x-1)$, $x \geq x_0 + 1$. Тоді $\psi(x)$ є додатною неспадною на $[x_0 + 1; +\infty)$ функцією, причому

$$\int_{x_0+1}^{+\infty}\frac{dx}{\psi(x)} < +\infty. \tag{12}$$

Розглянемо події

$$A_n = \left\{\omega \in \Omega : S_{\pi_\omega}(r_n) \geq G_\zeta(r_n)\sqrt{\psi(\ln G_\zeta(r_n))}\right\}, \qquad n \geq x_0 + 1.$$

Застосовуючи (11) з $r = r_n$ і $\lambda = \psi(\ln G_\zeta(r_n)) = \psi(n)$, отримуємо $P(A_n) < \frac{1}{\psi(n)}$, а тому, з огляду на (12),

$$\sum_{n \geq x_0+1} P(A_n) < +\infty.$$

Тоді за лемою Бореля–Кантеллі м. н. виконується лише скінченне число подій A_n, $n \geq x_0 + 1$. Отже, м. н.

$$S_{\pi_\omega}(r_n) < G_\zeta(r_n)\sqrt{\psi(\ln G_\zeta(r_n))}, \qquad n \geq n_0(\omega). \tag{13}$$

Зафіксуємо довільне $\omega \in \Omega$, для якого виконується (13), і нехай $r \in [r_n, r_{n+1})$, де $n \geq n_0(\omega)$. Скориставшись (13), маємо

$$\begin{aligned}S_{\pi_\omega}(r) < S_{\pi_\omega}(r_{n+1}) &< G_\zeta(r_{n+1})\sqrt{\psi(\ln G_\zeta(r_{n+1}))} = eG_\zeta(r_n)\sqrt{\psi(\ln G_\zeta(r_n)+1)} \\ &\leq eG_\zeta(r)\sqrt{\psi(\ln G_\zeta(r)+1)} = G_\zeta(r)\sqrt{\varphi(\ln G_\zeta(r))},\end{aligned}$$

що й потрібно було довести. □

Вибираючи $\varphi(x) = x^2$, $x \geq 1$, з теореми 6 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 4.1. *Нехай $\xi \in \Xi$, а $\zeta \in \mathcal{Z}_0$. Тоді для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса* (6) *м. н.*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln S_{\pi_\omega}(r)}{\ln G_\zeta(r)} \le 1.$$

Нехай $\xi \in \Xi$, а $\varphi(x)$ — довільна додатна неспадна на $[x_0;+\infty)$ функція. Тоді з кожної зростаючої до $+\infty$ послідовності (r_n) можна виділити підпослідовність (r_{n_k}) таку, що

$$\sum_{k\ge x_0} \frac{1}{\varphi^2(\ln G_\zeta(r_{n_k}))} < +\infty.$$

Застосовуючи (11) з $r = r_{n_k}$ і $\lambda = \varphi^2(\ln G_\zeta(r_{n_k}))$, а також лему Бореля-Кантеллі, легко отримати наступне твердження, яке в певній частині уточнює теорему 6.

Теорема 7. *Нехай $\xi \in \Xi$, $\zeta \in \mathcal{Z}_0$, (r_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність, а $\varphi(x)$ — додатна неспадна на $[x_0;+\infty)$ функція. Тоді існує підпослідовність (r_{n_k}) така, що для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса* (6) *м. н. правильна нерівність*

$$S_{\pi_\omega}(r_{n_k}) < G_\zeta(r_{n_k})\varphi(\ln G_\zeta(r_{n_k})), \qquad k \ge k_0(\omega).$$

5 Доведення теорем 4 і 5

Доведення теореми 4. Нехай $\xi \in \Xi$, а $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ — послідовність з показником збіжності $\tau \in (0;1]$ (у випадку $\tau = 0$ теорема 4 випливає з теореми 2). Доведемо, що м. н. виконується нерівність (7). Для цього, з огляду на лему 3.4 і наслідок 4.1, досить довести нерівність

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r)}{\ln G_\zeta(r)} \ge w\left(\frac{\tau}{2}\right). \tag{14}$$

Використовуючи теореми 1.8 і 3.4 з [4, гл. II], маємо

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln N_\zeta(r)}{\ln r} = \tau.$$

Тому за лемою 3.1 існує уточнений τ-порядок $\tau(r)$ такий, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r)}{r^{\tau(r)}} = 1. \tag{15}$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді з (15) випливає, що $N_\zeta(r) \le (1+\varepsilon)r^{\tau(r)}$ для всіх $r \ge r_0$, де $r_0 = r_0(\varepsilon) > 0$ — деяке фіксоване число. Використовуючи леми 3.3 та 3.2 і враховуючи, що функція $\rho(r) = \frac{1}{2}\tau(\sqrt{r})$ є уточненим $\frac{\tau}{2}$-порядком, отримуємо

$$\begin{aligned}
\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln G_\zeta(r)}{r^{\tau(r)}} &= \varliminf_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{r^{\tau(r)}}\int_0^{+\infty} N_\zeta(r\sqrt{t})\frac{dt}{(1+t)^2}\right) \\
&\le \varlimsup_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{r^{\tau(r)}}\int_0^{r_0^2/r^2} N_\zeta(r\sqrt{t})\frac{dt}{(1+t)^2}\right) + \varliminf_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{r^{\tau(r)}}\int_{r_0^2/r^2}^{+\infty} N_\zeta(r\sqrt{t})\frac{dt}{(1+t)^2}\right) \\
&\le \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\zeta(r_0)}{r^{\tau(r)}}\frac{r_0^2}{r_0^2+r^2} + (1+\varepsilon)\varliminf_{r\to+\infty} \int_{r_0^2/r^2}^{+\infty} \frac{(r\sqrt{t})^{\tau(r\sqrt{t})}}{r^{\tau(r)}}\frac{dt}{(1+t)^2} \\
&= (1+\varepsilon)\varliminf_{r\to+\infty} \int_{r_0^2/r^2}^{+\infty} \frac{(r^2t)^{\rho(r^2t)}}{(r^2)^{\rho(r^2)}}\frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1+\varepsilon}{w(\tau/2)}.
\end{aligned}$$

З довільності $\varepsilon > 0$ випливає, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln G_\zeta(r)}{r^{\tau(r)}} \le \frac{1}{w(\tau/2)}. \tag{16}$$

Нарешті з (16) і (15) маємо (14). Теорему 4 доведено. □

Доведення теореми 5. Насамперед доведемо наступне твердження: *якщо послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ така, що* $\arg\zeta_0 = \arg\zeta_1 = \ldots$, *а ξ — довільна послідовність дійсних випадкових величин таких, що $|\xi_n(\omega)| = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ м. н., то для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса* (6) *м. н.* $M_{\pi_\omega}(r) \ge G_\zeta(r)$ *для всіх* $r \ge 0$.

Справді, прийнявши $\alpha = \arg\zeta_0$, за вказаних умов на послідовності ζ і ξ м. н. маємо

$$M_{\pi_\omega}(r) \ge \left|\pi_\omega(rie^{i\alpha})\right| = \left|\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{ri}{\xi_n(\omega)|\zeta_n|}\right)\right| = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{r^2}{|\zeta_n|^2}\right)^{1/2} = G_\zeta(r).$$

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 5. Нехай ξ — послідовність Радемахера, $\tau \in [0;1]$. Доведемо, що існує послідовність $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ з $\tau_\zeta = \tau$ така, що для випадкового канонічного добутку Вейєрштрасса (6) м. н. правильна рівність (8). Розглядатимемо лише нетривіальний випадок $\tau \in (0;1]$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ нехай $\zeta_n = (n+1)^{1/\tau}$ у випадку $\tau \in (0;1)$ і $\zeta_n = (n+1)\ln^2(n+2)$ у випадку $\tau = 1$. Легко перевірити, що в кожному випадку для послідовності $\zeta = (\zeta_n)$ маємо $\zeta \in \mathcal{Z}_0$ і $\tau_\zeta = \tau$. Крім того,

$$n_\zeta(r) \sim \begin{cases} r^\tau, & \text{якщо } \tau \in (0;1); \\ r/\ln^2 r, & \text{якщо } \tau = 1 \end{cases}$$

при $r \to +\infty$. Звідси за правилом Лопіталя при $r \to +\infty$ отримуємо

$$N_\zeta(r) \sim \begin{cases} r^\tau/\tau, & \text{якщо } \tau \in (0;1); \\ r/\ln^2 r, & \text{якщо } \tau = 1, \end{cases}$$

а тому, як легко переконатись, існує уточнений τ-порядок $\tau(r)$ такий, що $N_\zeta(r) \sim r^{\tau(r)}$, $r \to +\infty$.

Доведемо, що

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln G_\zeta(r)}{N_\zeta(r)} \ge \frac{1}{w(\tau/2)}, \tag{17}$$

звідки, з огляду на те, що м. н. $M_{\pi_\omega}(r) \ge G_\zeta(r)$, і на вже доведену теорему 4, випливатиме м. н. (8).

Зафіксуємо довільне $\varepsilon \in (0;\tau)$ і нехай $r_0 > 0$ — довільне фіксоване число таке, що $N_\zeta(r) \ge (1-\varepsilon)r^{\tau(r)}$ для всіх $r \ge r_0$. Використовуючи леми 3.3 та 3.2 і враховуючи, що функція $\rho(r) = \frac{1}{2}\tau(\sqrt{r})$ є уточненим $\frac{\tau}{2}$-порядком, отримуємо

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln G_\zeta(r)}{N_\zeta(r)} = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln G_\zeta(r)}{r^{\tau(r)}} = \varliminf_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{r^{\tau(r)}}\int_0^{+\infty} N_\zeta(r\sqrt{t})\frac{dt}{(1+t)^2}\right)$$

$$\ge \varliminf_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{r^{\tau(r)}}\int_{r_0^2/r^2}^{+\infty} N_\zeta(r\sqrt{t})\frac{dt}{(1+t)^2}\right) \ge (1-\varepsilon)\varliminf_{r\to+\infty}\int_{r_0^2/r^2}^{+\infty}\frac{(r\sqrt{t})^{\tau(r\sqrt{t})}}{r^{\tau(r)}}\frac{dt}{(1+t)^2}$$

$$= (1-\varepsilon)\varliminf_{r\to+\infty}\int_{r_0^2/r^2}^{+\infty}\frac{(r^2t)^{\rho(r^2t)}}{(r^2)^{\rho(r^2)}}\frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1-\varepsilon}{w(\tau/2)}.$$

З довільності $\varepsilon \in (0;\tau)$ випливає (17). Теорему 5 доведено. □

References

[1] Filevych P.V. *Asymptotic behavior of entire functions with exceptional values in the Borel relation*. Ukrainian Math. J. 2001, **53** (4), 522–530.

[2] Filevych P.V. *Asymptotic relations between the means of Dirichlet series and their application*. Mat. Stud. 2003, **19** (2), 127–140.

[3] Filevych P.V. *On the growth of the maximum modulus of an entire function depending on the growth of its central index*. Ufa Math. J. 2011, **3** (1), 92–100.

[4] Goldberg A.A., Ostrovskii I.V. The distribution of values of meromorphic functions. Nauka, Moscow, 1970. (in Russian)

[5] Kahane J.-P. Some random series of functions. University Press, Cambridge, 1994.

[6] Pólya G., Szegö G. Problems and theorems in the analysis. V. 2. Nauka, Moscow, 1978. (in Russian)

[7] Wahlund A. *Über einen Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage der ganzen Funktion und seiner unteren Grenze nach dem Jensensche Theoreme*. Arkiv Math. 1929, **21 A** (23), 1–34.

[8] Zakharko Yu.B., Filevych P.V. *The Nevanlinna characteristic and maximum modulus of entire functions of finite order with random zeros*. Mat. Stud. 2011, **36**, 1, 40–50. (in Ukrainian)

Надійшло 11.01.2013

Zakharko Yu.B., Filevych P.V. *The growth of Weierstrass canonical products of genus zero with random zeros*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 50–58.

Let $\zeta = (\zeta_n)$ be a complex sequence of genus zero, τ be its exponent of convergence, $N(r)$ be its integrated counting function, $\pi(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right)$ be the Weierstrass canonical product, and $M(r)$ be the maximum modulus of this product. Then, as is known, the Wahlund-Valiron inequality

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{\ln M(r)} \geq w(\tau), \qquad w(\tau) := \frac{\sin \pi\tau}{\pi\tau},$$

holds, and this inequality is sharp. It is proved that for the majority (in the probability sense) of sequences ζ the constant $w(\tau)$ can be replaced by the constant $w\left(\frac{\tau}{2}\right)$ in the Wahlund-Valiron inequality.

Key words and phrases: entire function, Weierstrass products, maximum modulus, order, genus, exponent of convergence, integrated counting function.

Захарко Ю.Б., Филевич П.В. *Рост канонических произведений Вейерштрасса нулевого рода со случайными нулями* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 50–58.

Пусть $\zeta = (\zeta_n)$ — комплексная последовательность нулевого рода с показателем сходимости τ, $N(r)$ — ее усредненная считающая функция, $\pi(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right)$ — каноническое произведение Вейерштрасса, а $M(r)$ — максимум модуля этого произведения. Известно, что тогда выполняется неравенство Валунда-Валирона

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N(r)}{\ln M(r)} \geq w(\tau), \qquad w(\tau) := \frac{\sin \pi\tau}{\pi\tau},$$

и это неравенство является точным. В роботе доказано, что для большинства (в вероятностном смысле) последовательностей ζ постоянную $w(\tau)$ в неравенстве Валунда-Валирона можно заменить постоянной $w\left(\frac{\tau}{2}\right)$.

Ключевые слова и фразы: целая функция, произведение Вейерштрасса, максимум модуля, порядок, род, показатель сходимости, усредненная считающая функция.