ISSN 2075-9827 `http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp`
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 4–13 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.4–13
doi:10.15330/cmp.5.1.4-13

Баран О.Є.

ДЕЯКІ ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду встановлено деякі кругові та параболічні області збіжності.

Ключові слова і фрази: гіллястий ланцюговий дріб, область збіжності.

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 3b Naukova str., 79060, Lviv, Ukraine
E-mail: boe13@ukr.net

Вступ

Багато критеріїв збіжності неперервних дробів носять характер областей збіжності, тобто вказуються такі області у комплексній площині, що якщо елементи a_k, b_k належать цим областям, то неперервний дріб $\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \frac{a_k}{b_k}$ збігається. Області збіжності для неперервних дробів вперше зустрічаються у роботах Ворпіцького (1865), Прінгсгейма (1899) і Ван Флека (1901) [9]. Особливе місце займають параболічні та спарені області збіжності. Перша параболічна область з віссю параболи вздовж дійсної осі була досліджена Скоттом і Уоллом (1940) [15]. Огляд узагальнень параболічної теореми поданий у монографії Джоунса і Трона [9]. Важливим застосуванням цих результатів для функціональних неперервних дробів є кардіоїдні області збіжності.

Спареними областями збіжності називаються такі пари областей $\langle E_1, E_2 \rangle$ комплексної площини, що умови $a_{2k-1} \in E_1$ і $a_{2k} \in E_2$, $k \geq 1$, гарантують збіжність дробу $\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \frac{a_k}{1}$. Перші спарені області збіжності отримали Лейтон і Уолл (1936) [12]. Продовжили ці дослідження Ланге [11], Трон [7, 16], Лорентцен [13] та інші.

Гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) є багатовимірними узагальненнями неперервних дробів. Різні типи областей збіжності для різних конструкцій ГЛД досліджували у своїх роботах Д. Боднар [5, 6], Х. Кучмінська [10], Т. Антонова [1, 2], В. Гладун [1], Р. Дмитришин [8], О. Сусь [2], Н. Гоєнко [6], О. Манзій [14] та інші.

УДК 517.524
2010 *Mathematics Subject Classification:* 11A55, 11J70, 11K50, 30B70, 40A15.

Найпростішими за структурою, аналогічні структурі кратних степеневих рядів, є гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними

$$a_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1} = a_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)} z_{i_1}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{a_{i(2)} z_{i_2}}{1+ \ddots}}, \tag{1}$$

де $i(k) \in I$, $I = \{i(k) : i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k, 1 \leq i_p \leq i_{p-1}, p = \overline{1,k}, k \geq 1, i_0 = N\}$, N — максимальна кількість гілок розгалужень, $a_{i(k)}$ — комплексні числа, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$ — комплексні змінні. Скінченний дріб

$$f_n = a_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}$$

називається n-тим підхідним дробом ГЛД (1).

У даній статті для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними встановлено деякі області збіжності.

1 Деякі кругові області збіжності

Розглянемо функціональний ГЛД з нерівнозначними змінними вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}^2 z_{i_k}}{1}, \tag{2}$$

де $i(k) \in I$, $c_{i(k)}$ — комплексні числа, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$ — комплексні змінні.

Задамо відображення $l : I \to \mathbb{N}$ за таким правилом

$$l = l(i(k)) = \sum_{s=1}^{k} \delta_{i_k}^{i_s}, \tag{3}$$

де $\delta_{i_k}^{i_s}$ — символ Кронекера. Залежно від значення величини l, розіб'ємо множину I на три підмножини $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, які попарно не перетинаються:

$$I_1 = \{i(k) : i(k) \in I, \, l = 1, \, k \geq 1\}, \quad I_2 = \{i(k) : i(k) \in I, \, l - \text{парне}, \, k \geq 2\},$$

$$I_3 = \{i(k) : i(k) \in I, \, l - \text{непарне}, \, l > 1, \, k \geq 3\}.$$

Теорема 1. *Нехай для дробу (2) виконуються умови:*

а) $N > 1$ і елементи $c_{i(k)}$ належать областям

$$|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{1,i_k}| \leq \rho_{1,i_k}, \quad (\rho_{1,i_k} + |\Gamma_{1,i_k}|)^2 \leq \frac{r_1/\beta}{i_{k-1} - 1}, \quad \textit{якщо} \quad i(k) \in I_1, \tag{4}$$

$$|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{3,i_k}| \leq \rho_{3,i_k}, \quad (\rho_{3,i_k} + |\Gamma_{3,i_k}|)^2 \leq r/\beta, \quad \textit{якщо} \quad i(k) \in I_3, \tag{5}$$

$$|c_{i(k)} \pm i\Gamma_{2,i_k}| \geq \rho_{2,i_k}, \quad (\rho_{2,i_k} - |\Gamma_{2,i_k}|)^2 \geq (2 + r_1)(1 + r_1 + r)/\alpha, \quad \textit{якщо} \quad i(k) \in I_2, \tag{6}$$

або

б) $N = 1$ і елементи $c_{i(k)}$ належать областям (5), якщо $i(k) \in I_1 \cup I_3$, або (6), якщо $i(k) \in I_2$, де $r_1 = 0$ *при* $N = 1$ *і* $0 < r_1 < (1-3r)/(1+r)$ *при* $N > 1$, $0 < r < 1/3$, $\Gamma_{j,s} \in \mathbb{C}$, $\rho_{j,s} > 0$, $j = \overline{1,3}$, $s = \overline{1,N}$, $0 < \alpha \le \beta$.

Тоді ГЛД (2) рівномірно збігається в замкненій області

$$D = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ \alpha \le |z_s| \le \beta, \ s = \overline{1,N} \right\}$$

до деякої голоморфної функції $f(\mathbf{z})$ і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f(\mathbf{z}) - f_m(\mathbf{z})| \le MC_{N+m}^{N-1} q^{m+1},$$

де $f_m(\mathbf{z})$ — m-тий підхідний дріб (2), $M = 1 - r$ при $N = 1$ і $M = \max\limits_{1\le p\le N} (r_1/r)^p$ при $N > 1$, $q = \sqrt{(2+r_1)r/(1-r_1-r)}$.

Доведення. а) Очевидними є наступні оцінки:

$$|c_{i(k)}^2| \le (\rho_{j,i_k} + |\Gamma_{j,i_k}|)^2, \quad i(k) \in I_1 \cup I_3; \quad |c_{i(k)}^2| \ge (\rho_{2,i_k} - |\Gamma_{2,i_k}|)^2, \quad i(k) \in I_2.$$

Враховуючи умови (4)–(6), маємо

$$|c_{i(k)}^2| \le \frac{r_1/\beta}{i_{k-1}-1}, \quad \text{якщо} \quad i(k) \in I_1, \quad |c_{i(k)}^2| \le r/\beta, \quad \text{якщо} \quad i(k) \in I_3,$$

$$|c_{i(k)}^2| \ge (2+r_1)(1+r_1+r)/\alpha, \quad \text{якщо} \quad i(k) \in I_2.$$

Отже, для дробу (2) виконуються умови теореми, яка є багатовимірним аналогом теореми Лейтона-Уолла для ГЛД з нерівнозначними змінними [4]. Тому ГЛД (2) збігається і справджуються відповідні оцінки швидкості збіжності.

б) Позначимо $c_{\underbrace{11\ldots1}_{k}} = c_k$. Тоді дріб (2) матиме вигляд

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2 z_1}{1}. \tag{7}$$

Враховуючи умови (4)–(6), маємо: $|c_{2k-1}^2| \le r/\beta$, $|c_{2k}^2| \ge 2(1+r)/\alpha$, $k \ge 1$. Позначимо залишки дробу (7): $Q_n^{(n)} = 1$, $Q_k^{(n)} = 1 + c_{k+1}^2 z_1 / Q_{k+1}^{(n)}$, $k = \overline{1, n-1}$, $n \ge 1$.

При довільному n, $n \ge 1$, індукцією по k можна довести справедливість наступних нерівностей

$$|Q_{2k-1}^{(n)}| \ge 1, \quad 1 \le k \le [(n+1)/2]\,, \quad 1 - r \le |Q_{2k}^{(n)}| \le 1 + r, \quad 1 \le k \le [n/2]\,,$$

з яких при довільному n, $n \ge 1$, і довільному k, $1 \le k \le [(n+1)/2]$, отримуємо

$$\frac{|c_{2k}^2 z_1|}{|Q_{2k-1}^{(n)}||Q_{2k}^{(n)}|} = \frac{|c_{2k}^2 z_1|}{\left|\left(1 + \dfrac{c_{2k}^2 z_1}{Q_{2k}^{(n)}}\right) Q_{2k}^{(n)}\right|} = \frac{1}{\left|\dfrac{Q_{2k}^{(n)}}{c_{2k}^2 z_1} + 1\right|} \le \frac{1}{1 - \dfrac{|Q_{2k}^{(n)}|}{|c_{2k}^2 z_1|}} \le 2.$$

Із формули різниці підхідних дробів ГЛД [5] для неперервного дробу (7) маємо

$$|f_n(z_1)-f_m(z_1)|=\frac{\prod\limits_{k=1}^{m+1}|c_k^2z_1|}{\prod\limits_{k=1}^{m+1}|Q_k^{(n)}|\prod\limits_{k=1}^{m}|Q_k^{(m)}|},\quad n>m\geq 1.$$

Використовуючи наведені вище оцінки, при $m=2s-1$ отримаємо $|f_n(z_1)-f_{2s-1}(z_1)|\leq (1-r)q^{2s}$, а при $m=2s$ — $|f_n(z_1)-f_{2s}(z_1)|\leq 2^{-1/2}r^{1/2}(1-r)^{3/2}q^{2s+1}$, $s\geq 1$. Отже,

$$|f_n(z_1)-f_m(z_1)|\leq Mq^{m+1}, \tag{8}$$

де $M=1-r$, $q=\sqrt{2r/(1-r)}$. □

Якщо у теоремі 1 у випадку $N=1$ покласти $\alpha=\beta=1$, $z_1=1$, то шляхом підбору параметрів $\Gamma_j=\Gamma_{j,1}$, $j=1,2$, отримаємо деякі окремі випадки відомих ознак збіжності неперервного дробу

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{c_k^2}{1}. \tag{9}$$

Наслідок 1.1. *Нехай елементи c_k неперервного дробу (9) є комплексними числами, які задовольняють хоча б одну із умов:*

а) $|c_{2k-1}|\leq\sqrt{r}$, $|c_{2k}|\geq\sqrt{2(1+r)}$;

б) $|c_{2k-1}|\leq\sqrt{r}$, $|c_{2k}\pm i|\geq\sqrt{2(1+r)}+1$;

в) $|c_{2k-1}\pm ia|\leq\rho_1$, $(\rho_1+|a|)^2\leq r$, $|c_{2k}\pm i(a+1)|\geq\rho_2$, $(\rho_2-|a+1|)^2\geq 2(1+r)$;

де $k\geq 1$, $0<r<1/3$, $a\in\mathbb{C}$, $\rho_j>0$, $j=1,2$.

Тоді дріб (9) збігається і справджується оцінка швидкості збіжності (8).

Умови а) у наслідку 1.1 є аналогом теореми Лейтона-Уолла для неперервного дробу вигляду (9). Дані умови дають ширші області збіжності, ніж теорема Лейтона-Уолла [12]. Умови б)–в) є окремими випадками відповідно теорем Трона і Ланге для спарених кругових областей збіжності неперервних дробів [9, 11]. Ці умови визначають вужчі області збіжності, ніж у теоремах Трона та Ланге, проте маємо оцінки швидкості збіжності. Зауважимо, що у формулюваннях теорем Лейтона-Уолла, Трона та Ланге оцінок швидкості збіжності не наведено.

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{10}$$

де $i(k)\in I$, $a_{i(k)}$ — комплексні числа.

Залежно від значення величини l, яка визначається формулою (3), а також значення останнього індексу i_k в мультиіндексі $i(k)$, розіб'ємо множину всіх мультиіндексів I на підмножини, які попарно не перетинаються:

$$I_1^p=\{i(k):\ i(k)\in I,\ i_k=p,\ l=1,\ k\geq 1\},$$

$$I_2^p=\{i(k):\ i(k)\in I,\ i_k=p,\ l-\text{парне},\ k\geq 2\},$$

$$I_3^p=\{i(k):\ i(k)\in I,\ i_k=p,\ l-\text{непарне},\ l>1,\ k\geq 3\},\quad p=\overline{1,N}.$$

Лема 1.1. *Нехай* $N > 1$ *і* ρ_1, ρ *— довільні дійсні числа такі, що* $\rho_1 > 1, \rho > 1,$

$$V_1^{i_k} := \left\{ w \in \mathbb{C} : \ |w| \le \frac{\rho_1}{i_{k-1} - 1} \right\}, \tag{11}$$

$$V_3^{i_k} := \{ w \in \mathbb{C} : \ |w| \le \rho \}, \tag{12}$$

$$V_2^{i_k} := \{ w \in \mathbb{C} : \ |w+1| \ge 1 + \rho_1 \}, \tag{13}$$

$$E_1^{i_k} := \left\{ w \in \mathbb{C} : \ |w| \le \frac{\rho_1}{i_{k-1} - 1} \right\}, \tag{14}$$

$$E_3^{i_k} := \{ w \in \mathbb{C} : \ |w| \le \rho \}, \tag{15}$$

$$E_2^{i_k} := \left\{ w \in \mathbb{C} : \ w = re^{i\theta}, \ r \ge (2+\rho_1)(\rho_1 + \rho - \cos\theta), \ 0 \le \theta \le 2\pi \right\}, \tag{16}$$

де $i(k) \in I$.

Тоді виконуються співвідношення

$$E_j^{i_k} = \left\{ w \in \mathbb{C} : \ \frac{w}{1 + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k - 1} V_1^{i_{k+1}} + V_{3-j \mod 2}^{i_k}} \subseteq V_j^{i_k} \right\}, \tag{17}$$

де $i(k) \in I$; $j = 1$, *якщо* $l = 1$; $j = 2$, *якщо* l *— парне;* $j = 3$, *якщо* l *— непарне і* $l > 1$, l *визначається згідно (3).*

Доведення. Нехай $i(k) \in I$ — довільний мультиіндекс,

$$G_{3-j \mod 2}^{i_k} := \left(1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k - 1} V_1^{i_{k+1}} + V_{3-j \mod 2}^{i_k} \right), \quad j = \overline{1,3}.$$

Із співвідношення (17) маємо, що

$$E_j^{i_k} \subseteq V_j^{i_k} G_{3-j \mod 2}^{i_k} \quad \text{і} \quad E_j^{i_k} = \bigcap_{g_{3-j \mod 2} \in G_{3-j \mod 2}^{i_k}} V_j^{i_k} g_{3-j \mod 2}, \quad j = \overline{1,3}.$$

Покажемо, що при заданих множинах значень (11)–(13) відповідні їм множини елементів дробу (10) мають вигляд (14)–(16).

Доведемо справедливість формул (14), (15). Очевидно, що

$$G_2^{i_k} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k - 1} V_1^{i_{k+1}} + V_2^{i_k} = \{ w \in \mathbb{C} : \ |w| \ge 1 \}.$$

Нехай $g_2, \ g_2'$ — такі дві точки множини $G_2^{i_k}$, що $\arg(g_2') = \arg(g_2)$, $|g_2'| < |g_2|$ і $g_2' \in \partial G_2^{i_k}$, де $\partial G_2^{i_k}$ — межа множини $G_2^{i_k}$. Звідси маємо, що $V_j^{i_k} g_2' \subset V_j^{i_k} g_2$, $j = 1, 3$, і тому $E_j^{i_k}$, $j = 1, 3$, мають вигляд (14), (15) відповідно.

Доведемо справедливість формули (16). Легко бачити, що

$$G_3^{i_k} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k - 1} V_1^{i_{k+1}} + V_3^{i_k} = \{ w \in \mathbb{C} : \ |w - 1| \le \rho_1 + \rho \}.$$

Нехай g_3, $g_3^{'}$ — такі дві точки множини $G_3^{i_k}$, що $g_3 \neq 0, g_3^{'} \neq 0, \arg(g_3^{'}) = \arg(g_3), |g_3^{'}| > |g_3|$ і $g_3^{'} \in \partial G_3^{i_k}$. Звідси маємо, що $V_2^{i_k} g_3^{'} \subset V_2^{i_k} g_3$. Тому

$$E_2^{i_k} = \bigcap_{g_3 \in G_3^{i_k}} V_2^{i_k} g_3 = \bigcap_{g_3^{'} \in \partial G_3^{i_k}} V_2^{i_k} g_3^{'}.$$

Встановимо рівняння межі області (16). Нехай $\tau_2(\alpha)e^{i\alpha}$ і $\tau_3(\beta)e^{i\beta}$ — довільні точки на межах множин $V_2^{i_k}$ та $G_3^{i_k}$ відповідно. Маємо, що $\tau_2(\alpha) = -\cos\alpha + [(1+\rho_1)^2 - \sin^2\alpha]^{1/2}$, $0 \le \alpha \le 2\pi$, $\tau_3(\beta) = \cos\beta + [(\rho_1+\rho)^2 - \sin^2\beta]^{1/2}$, $0 \le \beta \le 2\pi$. Можна показати, що для довільних α і β, $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$, виконується нерівність

$$\tau_2(\alpha)\tau_3(\beta) \le (2+\rho_1)(\rho_1+\rho-\cos(\alpha+\beta)). \tag{18}$$

Для кожного кута $\theta = \alpha + \beta$ єдиним чином можна вибрати такі кути α і β, що в (18) буде виконуватися рівність. Звідси випливає, що множина $E_2^{i_k}$ визначається співвідношенням (16). □

Теорема 2. *Нехай $N > 1$ і $\rho_1, \rho, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — довільні дійсні числа такі, що $\rho_1 > 1$, $\rho > 1$, $0 < \varepsilon_1 < \rho_1$, $0 < \varepsilon_3 < \rho$, $0 < \varepsilon_2 < \rho_1 + \rho$. ГЛД (10) збігається, якщо елементи дробу $a_{i(k)} = r_{i(k)}e^{i\theta_{i(k)}}$ — комплексні числа, які задовольняють умови*

$$r_{i(k)} \le \frac{\rho_1 - \varepsilon_1}{i_{k-1} - 1}, \quad i(k) \in I_1^{i_k}, \tag{19}$$

$$r_{i(k)} \le \rho - \varepsilon_3, \quad i(k) \in I_3^{i_k}, \tag{20}$$

$$r_{i(k)} \ge (2+\rho_1)(\rho_1+\rho+\varepsilon_2-\cos\theta_{i(k)}), \quad i(k) \in I_2^{i_k}, \quad 0 \le \theta_{i(k)} \le 2\pi. \tag{21}$$

Доведення. Розглянемо ГЛД вигляду

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}(z)}{1}, \tag{22}$$

де $c_{i(k)}(z) = a_{i(k)}z$, якщо $i(k) \in I_1^{i_k} \cup I_3^{i_k}$, $c_{i(k)}(z) = a_{i(k)}/z$, якщо $i(k) \in I_2^{i_k}$, $z = re^{i\theta}$ — комплексна змінна. При $z = 1$ дріб (22) зводиться до дробу (10).

З умови (19) при $|z| \le 1 + \mu_1$, де $\mu_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{\rho_1 - \varepsilon_1}$, маємо, що $|c_{i(k)}(z)| = |a_{i(k)}z| \le \dfrac{\rho_1}{i_{k-1}-1}$ для всіх $i(k) \in I_1^{i_k}$. Аналогічно, з умови (20) при $|z| \le 1 + \mu_3$, де $\mu_3 = \dfrac{\varepsilon_3}{\rho - \varepsilon_3}$, маємо, що $|c_{i(k)}(z)| = |a_{i(k)}z| \le \rho$ для всіх $i(k) \in I_3^{i_k}$.

Нехай $i(k) \in I_2^{i_k}$. Виберемо такі достатньо малі додатні числа η і μ_2, щоб при $|\theta| \le \eta$ і $r \le 1 + \mu_2$ виконувались нерівності $R_{i(k)} \ge (2+\rho_1)(\rho_1+\rho-\cos\varphi_{i(k)})$ для всіх $i(k) \in I_2^{i_k}$, де $R_{i(k)} = |c_{i(k)}(z)|$, $\varphi_{i(k)} = \arg c_{i(k)}(z)$.

Нехай $\mu = \min(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Тоді в області $D := \{z \in \mathbb{C} : \ |\theta| < \eta, \ 0 < |z| < 1 + \mu\}$ для дробу (22) виконуються умови леми 1.1, а тому всі підхідні дроби, які є раціональними функціями, є рівномірно обмеженими і належать області

$$1 + \sum_{i_1=1}^{N} V_1^{i_1} = \left\{ w \in \mathbb{C} : \ |w-1| \le \frac{N\rho_1}{N-1} \right\}.$$

За теоремою Монтеля послідовність підхідних дробів ГЛД (22) утворює нормальне сімейство голоморфних функцій в області D.

Нехай
$$h = \min\left\{\frac{r_1}{\rho_1-\varepsilon_1}, \frac{r}{\rho-\varepsilon_3}, \frac{(2+\rho_1)\,(\rho_1+\rho+\varepsilon_2-1)}{(2+r_1)(1+r_1+r)}\right\},$$
де $0 < r_1 < (1-3r)/(1+r)$, $0 < r < 1/3$. Тоді для $|z| \le h$ елементи дробу (22) задовольняють умови багатовимірного аналогу ознаки збіжності Лейтона-Уолла [4]:
$$|c_{i(k)}(z)| = |a_{i(k)}z| \le \frac{r_1}{i_{k-1}-1}, \quad i(k) \in I_1^{i_k}, \quad |c_{i(k)}(z)| = |a_{i(k)}z| \le r, \quad i(k) \in I_3^{i_k},$$
$$|c_{i(k)}(z)| = \left|\frac{a_{i(k)}}{z}\right| \ge (2+r_1)(1+r_1+r), \quad i(k) \in I_2^{i_k}.$$

Отже, ГЛД (22) збігається в області, яка є перетином областей $|z| \le h$ і D. Тоді за теоремою Стілтьєса-Віталі дріб (22) збігається рівномірно на кожному компакті області D, зокрема в точці $z = 1$. □

У випадку $N = 1$, покладаючи $\rho_1 = 0$ і накладаючи на елементи дробу (22) умови (20) для $i(k) \in I_1^{i_k} \cup I_3^{i_k}$ та (21) для $i(k) \in I_2^{i_k}$, отримаємо відому теорему Трона [7].

Наслідок 1.2. *Нехай $N > 1$ і $\rho_1, \rho, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — довільні дійсні числа такі, що $\rho_1 > 1$, $\rho > 1$, $0 < \varepsilon_1 < \rho_1$, $0 < \varepsilon_3 < \rho$, $0 < \varepsilon_2 < \rho_1 + \rho$. ГЛД (10) збігається, якщо елементи дробу $a_{i(k)} = r_{i(k)}e^{i\theta_{i(k)}}$ — комплексні числа, які задовольняють умови*
$$r_{i(k)} \le \frac{\rho_1-\varepsilon_1}{i_{k-1}-1}, \quad i(k) \in I_1^{i_k}, \quad r_{i(k)} \le \rho-\varepsilon_3, \quad i(k) \in I_3^{i_k},$$
$$r_{i(k)} \ge (2+\rho_1)\,(\rho_1+\rho+\varepsilon_2+1)\,, \quad i(k) \in I_2^{i_k}.$$

У наслідку 1.2 межа області (21), яка є кривою «равлик Паскаля», вироджується в коло.

2 Деякі параболічні області збіжності

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб вигляду
$$\left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{23}$$
де $i(k) \in I$, b_0, $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ — комплексні числа.

Лема 2.1. *Нехай елементи ГЛД (23) належать наступним множинам:*
$$a_{i(k)} \in P^{i_k}(b,\alpha) := \left\{w \in \mathbb{C}: \ |w| - \mathrm{Re}\left(we^{-2i\alpha}\right) \le \frac{b^2}{2i_{k-1}}\cos^2\alpha\right\}, \tag{24}$$
$$b_{i(k)} \in H(b,\alpha) := \left\{w \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Re}\left(we^{-i\alpha}\right) \ge b\cos\alpha\right\}, \tag{25}$$
де $i(k) \in I$, $b > 0$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, $b_0 \in H(b,\alpha)$. *Тоді множини значень дробу (23) мають вигляд*
$$V^{i_k} = H^{i_k}\left(-\frac{b}{2},\alpha\right) := \left\{w \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Re}\left(we^{-i\alpha}\right) \ge -\frac{b}{2i_{k-1}}\cos\alpha\right\}, \quad i(k) \in I.$$

Доведення. Необхідно показати, що

$$\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} V^{i_{k+1}}} \subseteq V^{i_k}, \quad i(k)\in I. \tag{26}$$

Нехай $i(k)\in I$ — довільний мультиіндекс. Оскільки

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} V^{i_{k+1}} = H\left(-\frac{b}{2},\alpha\right), \quad (b_{i(k)}+v)\in H\left(\frac{b}{2},\alpha\right), \quad v\in \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} V^{i_{k+1}},$$

то

$$\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}+v}\in\left\{w\in\mathbb{C}:\ \left|w-\frac{a_{i(k)}e^{-i\alpha}}{b\cos\alpha}\right|\le\frac{|a_{i(k)}|}{b\cos\alpha}\right\}. \tag{27}$$

Для того, щоб виконувались співвідношення (26) потрібно, щоб круг (27) лежав у півплощині V^{i_k}. Це матиме місце, якщо відстань від центра круга до межі ∂V^{i_k} півплощини V^{i_k} буде не менше, ніж радіус круга, тобто

$$\frac{b}{2i_{k-1}}\cos\alpha+\operatorname{Re}\left(\frac{a_{i(k)}e^{-i\alpha}}{b\cos\alpha}e^{-i\alpha}\right)\ge\frac{|a_{i(k)}|}{b\cos\alpha},$$

що забезпечується умовою (24). □

Зауважимо, що в лемі 2.1 і надалі в позначенні множин P^{i_k} і V^{i_k} індекс i_k означає, що множини залежать від мультиіндекса $i(k)\in I$.

Розглянемо функціональний ГЛД вигляду

$$\left(b_0+z+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}+z}\right)^{-1}, \tag{28}$$

де $i(k)\in I$, b_0, $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ — комплексні числа, z — комплексна змінна.

Теорема 3. *Нехай для елементів ГЛД (28) виконуються умови:*

$$a_{i(k)}\in P^{i_k}(a,\alpha), \quad |a_{i(k)}|<M, \quad b_{i(k)}\in H(b,\alpha),$$

$$z\in H_0(a-b,\alpha):=\left\{w\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}\left(we^{-i\alpha}\right)>(a-b)\cos\alpha\right\},$$

де $i(k)\in I$, $a>0$, $M>0$, $-\pi/2<\alpha<\pi/2$, $b\in\mathbb{R}$, $b_0\in H(b,\alpha)$, множини $P^{i_k}(a,\alpha)$ і $H(b,\alpha)$ визначаються (24) і (25). Тоді дріб (28) рівномірно збігається до голоморфної функції комплексної змінної z на кожному компакті півплощини $H_0(a-b,\alpha)$.

Доведення. З умов теореми випливає, що $(b_{i(k)}+z)\in H_0(a,\alpha), k\ge 0$, $i(k)\in I$ при $k\ge 1$. Згідно з лемою 2.1 множинами значень дробу (28) є множини $V^{i_k}=H^{i_k}\left(-\frac{a}{2},\alpha\right)$, $i(k)\in I$, і тому

$$f_n=\left(b_0+z+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}+z}\right)^{-1}\in\left\{w\in\mathbb{C}:\ \left|w-\frac{e^{-i\alpha}}{a\cos\alpha}\right|\le\frac{1}{a\cos\alpha}\right\}.$$

Отже, підхідні дроби ГЛД (28), які є раціональними функціями, при $z \in H_0\,(a-b,\alpha)$ є рівномірно обмеженими. За теоремою Монтеля послідовність підхідних дробів утворює нормальне сімейство голоморфних функцій для $z \in H_0\,(a-b,\alpha)$.

Оскільки за умовою теореми $|a_{i(k)}| < M$, $i(k) \in I$, то існує таке число $M' > 0$, що для $|z| > M' + N$ і $z \in H_0(a-b,\alpha)$ виконуються нерівності $|b_{i(k)} + z| > |a_{i(k)}| + i_k, i(k) \in I$. Для цих значень z гіллястий ланцюговий дріб (28) абсолютно збігається за теоремою Слешинського-Прінгсгейма [3]. Тоді за теоремою Стілтьєса-Віталі маємо, що ГЛД (28) збігається рівномірно на кожному компакті півплощини $H_0(a-b,\alpha)$. □

Якщо покласти $a = b$ і $z = \varepsilon e^{i\alpha}$, то з теореми 3 випливає наслідок.

Наслідок 2.1. *ГЛД (23) збігається, якщо* $a_{i(k)} \in P^{i_k}(a,\alpha)$, $b_{i(k)} \in H(a+\varepsilon,\alpha)$, $|a_{i(k)}| < M$, *де* $i(k) \in I$, $a > 0$, $M > 0$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, ε *— довільне досить мале додатне число.*

Розглянемо ГЛД вигляду

$$\left(b_0 + z + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-c_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + z} \right)^{-1}, \tag{29}$$

де $i(k) \in I$, b_0, $c_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ — комплексні числа, z — комплексна змінна. Якщо $a_{i(k)} \in P^{i_k}(a,0)$, $a > 0$, то $c_{i(k)} = \sqrt{a_{i(k)}}$ задовольняє співвідношення $|\operatorname{Im}(c_{i(k)})| \leq \dfrac{a}{2\sqrt{i_{k-1}}}$, $i(k) \in I$.

Таким чином з теореми 3 випливає наслідок.

Наслідок 2.2. *Нехай елементи ГЛД (29) задовольняють умови* $|\operatorname{Im}(c_{i(k)})| \leq \dfrac{a}{2\sqrt{i_{k-1}}}$, $|c_{i(k)}| < M$, $\operatorname{Im}(b_{i(k)}) \geq b$, *де* $i(k) \in I, a > 0$, $M > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}(b_0) \geq b$. *Тоді дріб (29) рівномірно збігається до голоморфної функції комплексної змінної z на кожному компакті півплощини* $\operatorname{Im}(z) > a - b$.

REFERENCES

[1] Antonova T.N., Gladun V.R. *Some sufficient conditions of convergence and stability of branching continued fractions with alternating partial numerators*. Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya 2004, **47** (4), 27–35. (in Ukrainian)

[2] Antonova T.N., Sus' O.M. *Twin convergence sets for two-dimensional continued fractions with complex elements*. Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya 2007, **50** (3), 94–101. (in Ukrainian)

[3] Baran O.E. *Some convergence criteria for branched continued fractions with nonequivalent variables*. J. of Lviv Polytechnic State University. Appl. Math. 1998, **341**, 18–23. (in Ukrainian)

[4] Baran O.E. *The twin circular domains of convergence for branched continued fractions with nonequivalent variables*. Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya 2009, **52** (4), 73–80. (in Ukrainian)

[5] Bodnar D.I. Branching Continued Fractions. Naukova Dumka, Kyiv, 1986. (in Russian)

[6] Bodnar D.I., Hoenko N.P. *Approximation of the ratio of Lauricella functions by a branched continued fraction*. Mat. Stud. 2003, **20** (2), 210–214. (in Ukrainian)

[7] Cowling V., Leighton W., Thron W. *Twin convergence regions for continued fractions*. Bull. Amer. Math. Soc. 1944, **50**, 351–357.

[8] Dmytryshyn R. *The two-dimensional g-fraction with independent variables for double power series*. J. of Approximation Theory 2012, **164** (12), 1520–1539. doi: 10.1016/j.jat.2012.09.002

[9] Jones W.B., Thron W.J. Continued Fractions. Analytic Theory and Applications. Addison-Wesley, London, 1980.

[10] Kuchminska Kh.J. Two-dimensional continued fractions. Institute for Appl. Probl. of Mech. and Math., Lviv, 2010. (in Ukrainian)

[11] Lange L., Thron. W. *A two-parameter family of best twin convergence regions for continued fractions*. Math. Zeitschr. 1960, **73**, 295–311.

[12] Leighton W., Wall H. *On the transformation and convergence of continued fractions*. Amer. J. Math. 1936, **58**, 267–281.

[13] Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions. Vol. 1: Convergence Theory. Atlantis Studies in Mathematics for Engineering and Science, Atlantis Press, 2008.

[14] Manzij O.S. *On convergence of decomposition of ratio of hypergeometric Appell F_3 functions into a branching continued fraction in some unbounded domain*. Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya 1999, **42** (2), 7–11. (in Ukrainian)

[15] Scott W., Wall H. *A Convergence Theorem for Continued Fractions*. Trans. Amer. Math. Soc. 1940, **47**, 155–172.

[16] Thron. W. *Convergence regions for the general continued fraction*. Bull. Amer. Math. Soc. 1943, **49**, 913–916.

Надійшло 31.01.2013

Baran O.E. *Some convergence regions of branched continued fractions of special form*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 4–13.

Some circular and parabolic convergence regions for branched continued fractions of special form are established.

Key words and phrases: branched continued fraction, convergence region.

Баран О.Е. *Некоторые области сходимости ветвящихся цепных дробей специального вида* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 4–13.

Для ветвящихся цепных дробей специального вида установлены некоторые круговые и параболические области сходимости.

Ключевые слова и фразы: ветвящаяся цепная дробь, область сходимости.