Карпатські математичні
публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.3, №1

УДК 512.64

Заторський Р.А.

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ МАТРИЦЬ ХЕССЕНБЕРГА

Заторський Р.А. *Дослідження функцій матриць Хессенберга* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 49–55.

В роботі вивчаються зв'язки функцій матриць Хессенберга із парадетермінантами та параперманентами.

Вступ

Важливим класом квадратних матриць є матриці Хессенберга [6]. Вони виникають у підпросторах Крилова[1] [3] в процесі побудови ортогональних базисів, у задачах на знаходження власних значень матриці QR-методом (методом послідовних елементарних перетворень), а також у теорії симетричних многочленів — у детермінантних виразеннях симетричних многочленів [4]. Виявляється, що детермінанти матриць Хессенберга можна подати у вигляді парадетермінантів трикутних матриць, властивості яких добре вивчені. Позаяк квазітрикутні матриці [2] є частковим випадком матриць Хессенберга, то зв'язок останніх з парадетермінантами дозволяє узагальнити ряд теорем числення трикутних матриць, зокрема теорему Пойа [8], [7] про зв'язок перманентів із детермінантами.

Матриці Хессенберга з'являються також при дослідженні характеру та швидкості збіжності раціональних вкорочень рекурентних дробів.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.
Ключові слова і фрази: матриці Хессенберга, параперманент, парадетермінант.

[1]Підпростором Крилова розмірності m породженим вектором $v \in C^n$ і квадратною матрицею $A \in C^n \times C^n$ називають лінійний простір

$$K_m(v, A) = span\{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}.$$

1 Зведення матриць Хессенберга до парадетермінантів та параперманентів трикутних матриць

Теорема 1. *Справедливою буде тотожність*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2} & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\left\langle \begin{array}{ccccccc} a_{11} & & & & & & \\ a_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{22}} & a_{22} & & & & & \\ a_1 \cdot \frac{a_{31}}{a_{32}} & a_2 \cdot \frac{a_{32}}{a_{33}} & a_{33} & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & & & \\ a_1 \cdot \frac{a_{n-2,1}}{a_{n-2,2}} & a_2 \cdot \frac{a_{n-2,2}}{a_{n-2,3}} & a_3 \cdot \frac{a_{n-2,3}}{a_{n-2,4}} & \dots & a_{n-2,n-2} & & \\ a_1 \cdot \frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,2}} & a_2 \cdot \frac{a_{n-1,2}}{a_{n-1,3}} & a_3 \cdot \frac{a_{n-1,3}}{a_{n-1,4}} & \dots & a_{n-2} \cdot \frac{a_{n-1,n-2}}{a_{n-1,n-1}} & a_{n-1,n-1} & \\ a_1 \cdot \frac{a_{n1}}{a_{n2}} & a_2 \cdot \frac{a_{n2}}{a_{n3}} & a_3 \cdot \frac{a_{n3}}{a_{n4}} & \dots & a_{n-2} \cdot \frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n-1}} & a_{n-1} \cdot \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & a_{nn} \end{array} \right\rangle. \quad (1)$$

Доведення. Перемножимо детермінант лівої частини тотожності (1) на $\prod_{i=1}^{n-1} a_i$ та розділимо j-тий $(j = 2, 3, \dots, n)$ стовпець детермінанта лівої частини тотожності на a_{j-1}. При цьому отримаємо детермінант квазітрикутної матриці, з якої, при допомозі наслідку 1 [2], легко одержати парадетермінант правої частини тотожності (1). □

Теорема 2. *Справедливою є тотожність*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n-2} & -a_{n-2} & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & -a_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} a_{11} & & & & & & \\ a_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{22}} & a_{22} & & & & & \\ a_1 \cdot \frac{a_{31}}{a_{32}} & a_2 \cdot \frac{a_{32}}{a_{33}} & a_{33} & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & & & \\ a_1 \cdot \frac{a_{n-2,1}}{a_{n-2,2}} & a_2 \cdot \frac{a_{n-2,2}}{a_{n-2,3}} & a_3 \cdot \frac{a_{n-2,3}}{a_{n-2,4}} & \dots & a_{n-2,n-2} & & \\ a_1 \cdot \frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,2}} & a_2 \cdot \frac{a_{n-1,2}}{a_{n-1,3}} & a_3 \cdot \frac{a_{n-1,3}}{a_{n-1,4}} & \dots & a_{n-2} \cdot \frac{a_{n-1,n-2}}{a_{n-1,n-1}} & a_{n-1,n-1} & \\ a_1 \cdot \frac{a_{n1}}{a_{n2}} & a_2 \cdot \frac{a_{n2}}{a_{n3}} & a_3 \cdot \frac{a_{n3}}{a_{n4}} & \dots & a_{n-2} \cdot \frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n-1}} & a_{n-1} \cdot \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & a_{nn} \end{array} \right]. \quad (2)$$

Доведення. Спочатку скористаємося теоремою 1 і переходимо від детермінанта лівої частини тотожності (2) до відповідного парадетермінанта. Потім, використовуючи теорему про зв'язок параперманента з парадетермінантом, від отриманого парадетермінанта переходимо до параперманента правої частини тотожності (2). □

Зауваження 1.1. *Теорема 1 узагальнює теорему про зв'язок детермінанта із парадетермінантом із [2] та теорему про зв'язок перманентів із детермінантами [5].*

Приклад 1. *Нехай*

$$\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k},$$

$$s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k,$$

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$$

є відповідно елементарні симетричні многочлени, степеневі суми та повні однорідні симетричні многочлени, тоді справедливі [4] детермінантні представлення елементарних симетричних многочленів та повних однорідних симетричних многочленів через степеневі суми:

$$\sigma_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \ldots & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \ldots & s_1 \end{vmatrix}, \quad p_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \ldots & -(k-1) \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \ldots & s_1 \end{vmatrix}.$$

Тоді, внаслідок теорем 1, 2, їх можна виразити відповідно через парадетермінант та параперманент трикутної матриці

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & & & & \\ 1 \cdot \frac{s_2}{s_1} & s_1 & & & \\ 1 \cdot \frac{s_3}{s_2} & 2 \cdot \frac{s_2}{s_1} & s_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 1 \cdot \frac{s_k}{s_{k-1}} & 2 \cdot \frac{s_{k-1}}{s_{k-2}} & 3 \cdot \frac{s_{k-2}}{s_{k-3}} & \ldots & s_1 \end{pmatrix},$$

причому справедливими будуть тотожності:

$$\sigma_k = \frac{1}{k!} \mathrm{ddet}(A), \quad p_k = \frac{1}{k!} \mathrm{pper}(A).$$

Останні тотожності дозволяють перейти до відповідних рекурентних співвідношень. Для цього достатньо розкласти парадетермінант та параперманент матриці A за елементами останнього рядка.

2 Деякі теореми числення матриць

Доведемо дві теореми, які використовуються при дослідженні характеру та швидкості збіжності раціональних вкорочень рекурентних дробів та мають деяке відношення до матриць Хессенберга.

Нехай задана трикутна матриця

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & & & & \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \dots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & & & \\ a_{m+2,1} & a_{m+2,2} & \dots & a_{m+2,m} & a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_n, \qquad (3)$$

тоді ріг

$$R_{m1} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

цієї матриці природно позначити через A_m. На основі рогу

$$R_{n,m+1} = \begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & & & \\ a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побудуємо матриці

$$B_j = \begin{pmatrix} b_{j1} & & & \\ b_{j2} & a_{m+2,m+2} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ b_{j,n-m} & a_{n,m+2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

де

$$b_{ji} = \prod_{k=j}^{m+1} a_{m+i,k}, \quad i = 1, 2, \dots, n-m, \quad j = 1, 2, \dots, m+1. \qquad (4)$$

Теорема 1. *Для матриці (3) виконуються тотожності*

$$\operatorname{pper}(A_n) = \sum_{r=0}^{m} \operatorname{pper}(A_r) \cdot \operatorname{pper}(B_{r+1}), \qquad (5)$$

$$\operatorname{ddet}(A_n) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r} \operatorname{ddet}(A_r) \cdot \operatorname{ddet}(B_{r+1}). \qquad (6)$$

Доведення. Доведемо тотожність (5).

1. Доведемо, що число доданків лівої частини тотожності рівне числу доданків правої. Число доданків лівої частини дорівнює числу впорядкованих розбиттів натурального числа n на натуральні доданки і дорівнює 2^{n-1}. Знайдемо число доданків правої частини тотожності. Число доданків кожного із параперманентів B_j, $j = 1, 2, \ldots, m+1$, становить 2^{n-m-1}, тому маємо суму

$$2^{n-m-1}(1 + \sum_{r=1}^{m} 2^{r-1}) = 2^{n-m-1}(1 + 2^m - 1) = 2^{n-1}.$$

2. Доведемо, що всі доданки правої частини тотожності побудовані з елементів, які утворюють нормальні набори елементів матриці параперманента з лівої частини тотожності. З цією метою дослідимо доданки, що утворюються в результаті добутку параперманентів $A_r B_{r+1}$, $r = 0, 1, \ldots, m$.

a) Кожен доданок добутку матиме n різних співмножників, що є елементами матриці параперманента A_n, бо параперманент A_r має порядок r, а в кожен доданок параперманента B_{r+1} входитиме $n - (r+1) - 1 = n - r$ співмножників.

b) Кожен доданок добутку, внаслідок задання елементів b_{ji} рівністю (4), можна подати у вигляді факторіальних добутків ключових елементів параперманента A_n.

3. Доведемо, що всі доданки добутку різні, а це випливає із того, що перші стовпці параперманентів B_{r+1}, $r = 0, 1, \ldots, m$, різні.

Доведемо тотожність (6).

Перш за все відзначимо, що знак нормального набору ключових елементів матриці n-го порядку залежить від парності числа $n-k$, де k — число ключових елементів цього набору. Знайдемо суму порядків парадетермінантів матриць A_r і B_{r+1}. Параперманент матриці B_{r+1} при довільному $r = 0, 1, \ldots, m$ має порядок $n - m$, а парадетермінант матриці A_r — порядок r, тому сума порядків парадетермінантів цих матриць дорівнює $n + r - m$. Парадетермінант матриці A_n має порядок n.

Розглянемо деякий фіксований нормальний набір k ключових елементів матриці A_n, до складу якого входить факторіальний добуток $\{a_{sr}\}$, $r < m \leqslant s \leqslant n$. Алгебраїчним доповненням до цього факторіального добутку у матриці A_n є добуток парадетермінанта A_r на парадетермінант рогу $R_{n,s+1}$. Алгебраїчним доповненням до факторіального добутку елемента $\{a_{sr} \cdot \ldots \cdot a_{s,m+1}\}$ у парадетермінанті B_{r+1} є парадетермінант рогу $R_{n,s+1}$. Таким чином, зрівнявши знак $(-1)^{n-k}$ фіксованого нормального набору парадетермінанта матриці A_n із знаком $(-1)^{n+r-m-k}$ того ж набору елементів у добутку $\mathrm{ddet}A_r \cdot \mathrm{ddet}B_{r+1}$, прийдемо до рівності $(-1)^{n-k} = (-1)^{n+r-m-k}$. Після відповідного скорочення приходимо до висновку, що добуток $\mathrm{ddet}A_r \cdot \mathrm{ddet}B_{r+1}$ правої частини рівності (6) має знак $(-1)^{m-r}$. □

Наслідок 1. *Справедливими будуть тотожності*

$$\operatorname{pper}(A_n)=\sum_{r=0}^{m}\operatorname{pper}(A_r)\sum_{i=1}^{n-m}\prod_{k=r+1}^{m+1}a_{m+i,k}\operatorname{pper}(R_{n,m+i+1}),$$

$$\operatorname{ddet}(A_n)=\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\operatorname{ddet}(A_r)\sum_{i=1}^{n-m}\prod_{k=r+1}^{m+1}a_{m+i,k}\operatorname{ddet}(R_{n,m+i+1}),$$

де $R_{n,m+i+1}$ — *ріг матриці* A_n.

Нехай задано квадратну матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{10} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{11} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ a_{32} & a_{22} & a_{12} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots\\ a_{n-1,n-2} & a_{n-2,n-2} & a_{n-3,n-2} & \dots & a_{1,n-2} & -1 & 0\\ a_{n,n-1} & a_{n-1,n-1} & a_{n-2,n-1} & \dots & a_{2,n-1} & a_{1,n-1} & -1\\ a_{n+1,n} & a_{n,n} & a_{n-1,n} & \dots & a_{3n} & a_{2n} & a_{1n} \end{pmatrix}_{n+1}.$$

Позначимо детермінант матриці утвореної видаленням із матриці A першого рядка та k-го стовпця (нумерація стовпців ведеться від нульового до n-го) через $A_{k,n}$.

Теорема 2. *Справедливе рекурентне співвідношення*

$$A_{k,n}=-a_{1,k-1}A_{k-1,n}+a_{2,k-1}A_{k-2,n}-\ldots+(-1)^{k-1}a_{k-1,k-1}A_{1,n}+(-1)^{k}a_{k,k-1}A_{0,n}. \qquad (7)$$

Доведення. Позаяк у детермінанті лівої частини співвідношення (7) внаслідок видалення k-го стовпця відсутні елементи $a_{1,k},\ldots,a_{n-k+1,n}$, то у детермінантах правої частини цього співвідношення ці елементи можна замінити нулями. Розкладаючи всі утворені детермінанти правої частини співвідношення за елементами k-го стовпця, отримаємо розклад детермінанта лівої частини цього співвідношення за елементами k-го рядка. □

Література

1. Заторський Р.А. *Про паравизначники і параперманенти трикутних матриць* // Математичні студії. — 2002. — Т.17, №1. – С. 3–17.
2. Заторський Р.А., Ліщинський І.І. *Про зв'язок детермінантів з парадетермінантами* // Математичні студії. – 2006. – Т. 25, № 1. – С. 97–102.
3. Крылов А.Н. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем. — 1931. — С. 26.
4. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. — М.: Наука, 2008. — 536 с.
5. Тараканов В.Е., Заторский Р.А. *О связи детерминантов с перманентами* // Матем. заметки. — 2009. — Т.85, №2. — С. 292–299.

6. Hessenberg K. Thesis. Dartmstadt, Germany, Technische Hochschule, 1942.
7. Marcus M., Minc H. *On the relation between the determinant and the permanent*, Illinois J. Math., **5** (1961), 376–381.
8. Polya G., Aufgabe 424, Arch. Math. Phys. (3) 20 (1913), 271.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,

Івано-Франківськ, Україна

e-mail: *romazz@rambler.ru*

Надійшло 28.02.2011

Zatorsky R.A. *Researching of Hessenberg's matrix functions*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 49–55.

In this work we research the connections of Hessenberg's matrix functions with paradeterminants and parapermanents.

Заторский Р.А. *Исследование функций матриц Хессенберга* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 49–55.

В работе изучаются связи функций матриц Хессенберга с парадетерминантами и параперманентами.