Карпатські математичні публікації. Т.3, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №2

УДК 519.21

Копитко Б., Шевчук Р.

МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ НЕОДНОРІДНОЇ ДИФУЗІЇ НА ПІВПРЯМІЙ ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ КРАЙОВОЮ УМОВОЮ ФЕЛЛЕРА-ВЕНТЦЕЛЯ

Копитко Б., Шевчук Р. *Модель процесу неоднорідної дифузії на півпрямій із загальною крайовою умовою Феллера-Вентцеля* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №2. — С. 88–99.

Використовуючи методи класичної теорії потенціалу, побудовано мультиплікативну сім'ю операторів, яка описує неоднорідний дифузійний процес на півпрямій із загальною крайовою умовою Феллера-Вентцеля.

Вступ

В статті за допомогою аналітичних методів знайдено інтегральне зображення мультиплікативної сім'ї операторів, яка описує неоднорідний процес Феллера на півпрямій, такий, що в її внутрішніх точках він збігається із заданим дифузійним процесом, а в точці нуль поведінка цього процесу визначається загальною крайовою умовою Феллера-Вентцеля ([1, 10]). Шукану сім'ю операторів представлено у вигляді суми двох теплових потенціалів, породжених звичайним фундаментальним розв'язком для оберненого рівняння дифузії: потенціалу Пуассона та потенціалу простого шару. В одновимірному випадку, як відомо, загальна крайова умова Феллера-Вентцеля є комбінацією чотирьох доданків: трьох локальних, які вказують на те, що в точці нуль можливі затримка, неперервне миттєве відбиття та обрив процесу відповідно, а також нелокального, що відповідає за стрибкоподібне повернення процесу з нуля в середину області. Крайова умова, що розглядається в цій статті, є комбінацією всіх названих доданків. Обмеження загальності полягає лише в тому, що коефіцієнт затримки є строго додатним в усіх точках своєї області визначення.

Відзначимо, що раніше подібна задача досліджувалися за допомогою методів класичної теорії потенціалу в роботах [3], [8], [9] для випадку однорідності дифузійного

2000 *Mathematics Subject Classification:* 60J60.

Ключові слова і фрази: мультиплікативна сім'я операторів, неоднорідний дифузійний процес, крайова умова Феллера-Вентцеля

Робота підтримана ДФФД і РФФД, грант №Ф40.1/023.

процесу і відсутності в крайовій умові Феллера-Вентцеля доданка, що відповідає за можливість обриву процесу після його попадання в точку нуль. В згадуваних вище роботах [1, 10] (а також в огляді [6]) проблема існування напівгрупи Феллера для одновимірних (однорідних) дифузійних процесів, яка відповідає загальним крайовим умовам, була розв'язана за допомогою методів загальної теорії напівгруп.

1 Основні позначення

D — область $\{x : x > 0\}$ на прямій $\mathbb{R}$; ∂D — межа області D, $\partial D = \{0\}$; $\overline{D}$ — замикання D, $\overline{D} = D \cup \partial D$.

D_s^r, D_x^p — символи частинної похідної за змінною s порядку r і будь-якої частинної похідної за x порядку p, де r і p — цілі невід'ємні числа.

c, h — додатні сталі (одні й ті самі позначення будуть використовуватися для різних сталих, конкретні значення яких нам не важливі); T — фіксоване додатне число.

Введемо позначення для функціональних просторів, які будуть використовуватися в роботі. Нехай I — деякий скінченний півінтервал або відрізок, Γ — множина D, $\overline{D}$, або $\mathbb{R}$.

$C_b(\Gamma)$ — банахів простір всіх дійсних функцій $f(x)$, заданих на Γ, обмежених і неперервних на Γ, з нормою $\|f\| = \sup\limits_{x\in\Gamma} |f(x)|$.

$C_b^{(2)}(\Gamma)$ — банахів простір дійсних функцій, обмежених і неперервних на Γ разом з похідними перших двох порядків.

$C_{\text{рівн}}^{(2)}(\Gamma)$ — банахів простір дійсних функцій, обмежених і рівномірно неперервних на Γ разом з похідними перших двох порядків.

$C(I \times \Gamma)$ — простір дійсних функцій, неперервних на $I \times \Gamma$.

$C^{1,2}(I\times\Gamma)$ — простір дійсних функцій $g(s, x)$, заданих на $I\times\Gamma$, неперервно диференційовних за змінною s на I та двічі неперервно диференційовних за x на множині Γ.

$H^{\frac{\alpha}{2}}([0, T])$ — простір дійсних функцій, неперервних за Гельдером з показником $\frac{\alpha}{2}$ на відрізку $[0, T]$ $(0 < \alpha < 1)$ ([7, гл. I, §1]).

$H^{\frac{\alpha}{2},\alpha}([0, T] \times \Gamma)$ — простір всіх дійсних функцій $g(s, x)$, заданих на $[0, T] \times \Gamma$, неперервних за Гельдером відносно s (з показником $\frac{\alpha}{2}$) рівномірно по x, а також відносно x (з показником α) рівномірно по s $(0 < \alpha < 1)$ ([7, гл. I, §1]).

2 Постановка задачі та деякі допоміжні факти

Нехай в області D задано неоднорідний дифузійний процес, який визначається диференціальним оператором другого порядку A_s, $s \in [0, T]$, що діє на $C_{\text{рівн}}^{(2)}(\overline{D})$:

$$A_s f(x) = \frac{1}{2} b(s, x) \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + a(s, x) \frac{df}{dx}(x), \tag{1}$$

де $a(s, x)$ і $b(s, x)$ — дійсні неперервні обмежені функції в області $[0, T] \times \overline{D}$, до того ж $b(s, x) \geq 0$ для всіх $(s, x) \in [0, T] \times \overline{D}$. Припустимо також, що задано крайовий оператор

$L_s,\ s\in[0,T]$, такого вигляду:

$$L_sf(0)=\sigma(s)A_sf(0)-\zeta(s)f'(0)+\gamma(s)f(0)+\int\limits_D[f(0)-f(y)]\mu(s,dy), \tag{2}$$

де функції $\sigma,\ \zeta,\ \gamma$ та міра μ задовольняють наступним умовам:

a) $\sigma(s),\ \zeta(s),\ \gamma(s)$ — невід'ємні, неперервні для $s\in[0,T]$;

b) $\mu(s,\cdot)$ — невід'ємна міра на D, така, що для довільної обмеженої вимірної на $\overline{D}$ функції f інтеграли $F_f(s)=\int\limits_0^1 yf(y)\mu(s,dy)$ та $G_f(s)=\int\limits_1^\infty f(y)\mu(s,dy)$ є неперервними на відрізку $[0,T]$;

c) $\sigma(s)+\zeta(s)+\gamma(s)+\mu(s,D)>0$ для всіх $s\in[0,T]$.

Відзначимо, що оператор в (2) є оператором Феллера-Вентцеля ([1, 10]), за допомогою якого визначається поведінка процесу при виході на межу області. Коефіцієнти $\sigma,\ \zeta$, та γ відповідають за такі властивості процесу в нулі, як його зупинка, миттєве неперервне відбиття та обрив відповідно. Міра μ відповідає за стрибкоподібний вихід процесу з нуля.

Наша задача полягає в тому, щоб побудувати мультиплікативну сім'ю операторів T_{st}, $0\le s<t\le T$, які описують неоднорідний феллерівський процес на $\overline{D}$, інфінітезимальний оператор $\widetilde{A}_s$ якого визначений на функціях $f\in C^{(2)}_{рівн}(\overline{D})$, таких, що

$$L_sf(0)=0, \tag{3}$$

і для цих функцій $\widetilde{A}_sf=A_sf$.

Згідно з аналітичним підходом до розв'язання поставленої задачі шукана сім'я операторів $T_{st},\ 0\le s<t\le T$, визначатиметься за допомогою розв'язку $u(s,x,t)$ наступної параболічної крайової задачі:

$$\frac{\partial u(s,x,t)}{\partial s}+\frac{1}{2}b(s,x)\frac{\partial^2u(s,x,t)}{\partial x^2}+a(s,x)\frac{\partial u(s,x,t)}{\partial x}=0,\quad 0\le s<t\le T,\ x\in D, \tag{4}$$

$$\lim_{s\uparrow t}u(s,x,t)=\varphi(x),\quad x\in D, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}-\sigma(s)\frac{\partial u(s,0,t)}{\partial s}-\zeta(s)\frac{\partial u(s,0,t)}{\partial x}+\gamma(s)u(s,0,t)&\\ +\int\limits_D[u(s,0,t)-u(s,y,t)]\mu(s,dy)=0,\quad 0\le s<t\le T,&\end{aligned} \tag{6}$$

де $\varphi\in C_b(\overline{D})$ — задана функція.

В нашій статті задача (4)–(6) буде досліджуватися при виконанні таких додаткових припущень:

1) функції $a(s,x)$ та $b(s,x)$ належать до класу $H^{\frac{\alpha}{2},\,\alpha}([0,T]\times\overline{D})$, крім того, існують сталі b і B такі, що $0<b\le b(s,x)\le B$ для всіх $(s,x)\in[0,T]\times\overline{D}$;

2) $\sigma(s) > 0$ для всіх $s \in [0, T]$ і належить до класу $H^{\frac{\alpha}{2}}([0, T])$;

3) функція $F_f(s)$ з b) належить до класу $H^{\frac{\alpha}{2}}([0, T])$ для всіх $f \in C_b(\overline{D})$.

Зауваження 2.1. *Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, а функції $a(s, x)$ та $b(s, x)$ визначені на $[0, T] \times \mathbb{R}$ і в цій області задовольняють властивість 1).*

Враховуючи останнє зауваження і умову 1), можна стверджувати (див. [2, Додаток, §6], [4, гл. IV, §11], [5, гл. II, §2]), що для рівняння (4) в області $[0, T] \times \mathbb{R}$ існує фундаментальний розв'язок, який позначимо через $G(s, x, t, y)$, $0 \le s < t \le T$, $x, y \in \mathbb{R}$. Нагадаємо, що функція $G(s, x, t, y)$ — невід'ємна, неперервна за сукупністю змінних, неперервно диференційовна по s, двічі неперервно диференційовна по x і для неї виконуються нерівності $(0 \le s < t \le T,\ x,\ y \in \mathbb{R},\ 2r + p \le 2)$:

$$|D_s^r D_x^p G(s, x, t, y)| \le c(t - s)^{-\frac{1+2r+p}{2}} \exp\left\{-h\frac{(y - x)^2}{t - s}\right\}. \tag{7}$$

До того ж $G(s, x, t, y)$ зображується у вигляді

$$G(s, x, t, y) = Z_0(s, y - x, t, y) + Z_1(s, x, t, y),$$

де

$$Z_0(s, x, t, y) = [2\pi b(t, y)(t - s)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(y - x)^2}{2b(t, y)(t - s)}\right\},$$

а для функції $Z_1(s, x, t, y)$ справджуються нерівності

$$|D_s^r D_x^p Z_1(s, x, t, y)| \le c(t - s)^{-\frac{1+2r+p-\alpha}{2}} \exp\left\{-h\frac{(y - x)^2}{t - s}\right\}, \tag{8}$$

де $0 \le s < t \le T,\ x,\ y \in \mathbb{R},\ 2r + p \le 2$.

З умови 3) випливає, що для кожної функції $f \in C_b(\overline{D})$ існує коефіцієнт Гельдера c_f, такий, що для всіх $s,\ s' \in [0, T]$ виконується нерівність

$$|F_f(s) - F_f(s')| \le c_f |s - s'|^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Легко перевірити, що c_f, як функціонал, визначений на лінійному просторі $C_b(\overline{D})$, є напівнормою. Отже, має місце наступна лема.

Лема 2.1. *Нехай для міри μ з (2) виконана умова 3). Тоді для будь-якого числа $M > 0$ існує така стала $c > 0$, що для всіх функцій $f \in C_b(\overline{D})$, обмежених числом M, і для всіх $s,\ s' \in [0, T]$ функція $F_f(s)$ задовольняє нерівність*

$$|F_f(s) - F_f(s')| \le c|s - s'|^{\frac{\alpha}{2}}.$$

3 Розв'язання крайової задачі для рівняння дифузії

Встановимо класичну розв'язність крайової задачі (4)–(6) методом граничних інтегральних рівнянь. Це означає, що розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$u(s,x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}} G(s,x,t,y)\varphi(y)dy+\int\limits_s^t G(s,x,\tau,0)V(\tau,t,\varphi)d\tau, \tag{9}$$

де G — фундаментальний розв'язок рівняння (4), $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ — функція з умови (5), а $V(s,t,\varphi)$ — невідома функція, яка підлягає визначенню. Перший інтеграл у формулі (9) надалі позначатимемо через $u_0(s,x,t)$, а другий — через $u_1(s,x,t)$. Нагадаємо (див., наприклад, [4, гл. IV], [5, гл. II]), що в теорії параболічних рівнянь функції u_0 та u_1 ще називаються потенціалами Пуассона та простого шару відповідно.

Припустимо a priori, що функція $V(s,t,\varphi)$ — неперервна при $s \in [0,t)$ і така, що функція $u_1(s,x,t)$ неперервна в області $(s,x) \in [0,t] \times \overline{D}$, задовольняє умову

$$\lim_{s\uparrow t} u_1(s,x,t)=0,$$

якими б не були $t \in (0,T]$ і $x \in \overline{D}$, а коли x з D прямує до нуля, то

$$\frac{\partial u_1(s,x,t)}{\partial x} \longrightarrow -\frac{V(s,t,\varphi)}{b(s,0)}+\int\limits_s^t \frac{\partial Z_1}{\partial x}(s,0,\tau,0)V(\tau,t,\varphi)d\tau, \quad 0 \le s < t \le T. \tag{10}$$

Це так зване співвідношення про стрибок — найбільш важлива властивість потенціалів простого шару (див. [4, гл. IV, §15], [5, гл. II, §3]). Тоді з означення та властивостей фундаментального розв'язку G випливає, що функція u з (9) задовольняє рівняння (4) та "початкову"умову (5).

Отже, для побудови розв'язку задачі (4)–(6) залишилося підібрати V у такий спосіб, щоб для функції u з (9) була виконана умова (6). У першу чергу відзначимо, що якщо взяти до уваги (5), то (6) зводиться, очевидно, до наступної рівності:

$$u(s,0,t)=\varphi(0)-\int\limits_s^t g(\tau,t)d\tau, \tag{11}$$

де

$$g(\tau,t)=-\zeta_0(\tau)\frac{\partial u(\tau,0,t)}{\partial x}+\gamma_0(\tau)u(\tau,0,t)+\int\limits_D \left[u(\tau,0,t)-u(\tau,y,t)\right]\mu_0(\tau,dy),$$

$$\zeta_0(\tau)=\frac{\zeta(\tau)}{\sigma(\tau)}, \quad \gamma_0(\tau)=\frac{\gamma(\tau)}{\sigma(\tau)}, \quad \mu_0(\tau,dy)=\frac{\mu(\tau,dy)}{\sigma(\tau)}.$$

Підставляючи тепер всюди в обох частинах рівності (11) замість функції u її вираз із (9), а замість $\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0}$ — співвідношення (10), після нескладних перетворень отримаємо наступне інтегральне рівняння Вольтерра першого роду відносно V:

$$\Psi_0(s,t,\varphi)=\int_s^t K_0(s,\tau)V(\tau,t,\varphi)d\tau, \quad 0 \le s < t \le T, \tag{12}$$

де

$$K_0(s,\tau) = -\frac{\zeta_0(\tau)}{b(\tau,0)} - G(s,0,\tau,0) - \int_s^\tau \bigg(-\zeta_0(l)\frac{\partial Z_1}{\partial x}(l,0,\tau,0) + \gamma_0(l)G(l,0,\tau,0)$$
$$+ \int_D \left[G(l,0,\tau,0) - G(l,y,\tau,0)\right]\mu_0(l,dy)\bigg)dl,$$

$$\Psi_0(s,t,\varphi) = u_0(s,0,t) - \varphi(0) + \int_s^t \bigg(-\zeta_0(l)\frac{\partial u_0}{\partial x}(l,0,t) + \gamma_0(l)u_0(l,0,t)$$
$$+ \int_D \left[u_0(l,0,t) - u_0(l,y,t)\right]\mu_0(l,dy)\bigg)dl.$$

За допомогою прийому Гольмгрена зведемо це рівняння до еквівалентного рівняння Вольтерра другого роду. Для цього визначимо оператор

$$\mathcal{E}(s,t)\Phi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{ds}\int_s^t (\rho - s)^{-\frac{1}{2}}\Phi(s,t,\varphi)d\rho, \quad 0 \le s < t \le T,$$

і подіємо ним на обидві частини рівняння (12). Після відповідних перетворень будемо мати

$$V(s,t,\varphi) = \int_s^t K(s,\tau)V(\tau,t,\varphi)d\tau + \Psi(s,t,\varphi), \quad 0 \le s < t \le T, \tag{13}$$

де

$$K(s,\tau)$$
$$= \sqrt{\frac{2b(s,0)}{\pi}}\frac{d}{ds}\int_s^\tau (\rho - s)^{-\frac{1}{2}}\bigg[Z_1(\rho,0,\tau,0) + \int_\rho^\tau \bigg(-\zeta_0(l)\frac{\partial Z_1(l,0,\tau,0)}{\partial x} + \gamma_0(l)G(l,0,\tau,0)$$
$$+ \int_D \left[G(l,0,\tau,0) - G(l,y,\tau,0)\right]\mu_0(l,dy)\bigg)dl\bigg]d\rho - \sqrt{\frac{2b(s,0)}{\pi}}\frac{\zeta_0(\tau)}{b(\tau,0)}(\tau - s)^{-\frac{1}{2}},$$
$$\Psi(s,t,\varphi) = \sqrt{b(s,0)}\mathcal{E}(s,t)\Psi_0.$$

Доведемо, що для ядра $K(s,\tau)$ та функції $\Psi(s,t,\varphi)$ справджуються нерівності

$$|K(s,\tau)| \le c(\tau - s)^{-1+\frac{\alpha}{2}}, \tag{14}$$
$$|\Psi(s,t,\varphi)| \le c\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Розглянемо спочатку $K(s,\tau)$. Спростивши похідну по змінній s в правій частині виразу для $K(s,\tau)$, отримуємо

$$K(s,\tau) = \sqrt{\frac{2b(s,0)}{\pi}}\left(K_1(s,\tau) + K_2(s,\tau) + K_3(s,\tau)\right),$$

де

$$K_1(s,\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{3}{2}}\left[Z_1(s,0,\tau,0)-Z_1(\rho,0,\tau,0)\right]d\rho,$$

$$K_2(s,\tau)=\int\limits_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}\left[\zeta_0(\rho)\frac{\partial Z_1(\rho,0,\tau,0)}{\partial x}-\gamma_0(\rho)G(\rho,0,\tau,0)\right]d\rho$$
$$+\left[Z_1(s,0,\tau,0)-\frac{\zeta_0(\tau)}{b(\tau,0)}\right](\tau-s)^{-\frac{1}{2}},$$

$$K_3(s,\tau)=\int\limits_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho\int\limits_D\left[G(\rho,y,\tau,0)-G(\rho,0,\tau,0)\right]\mu_0(\rho,dy).$$

Оцінка (14) для K_1 знаходиться з допомогою формули Лагранжа для приросту $Z_1(\rho,0,\tau,0)-Z_1(s,0,\tau,0)$ і нерівності (8) (при $r=1$, $p=0$), а її правильність для K_2 є очевидним наслідком нерівностей (7), (8).

Щоб довести (14) для інтеграла $K_3(s,\tau)$, достатньо розглянути лише його складову

$$J(s,\tau)=\int\limits_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho\int\limits_0^1\left[Z_0(\rho,y,\tau,0)-Z_0(\rho,0,\tau,0)\right]\mu_0(\rho,dy),$$

яка має "найгіршу"особливість порівняно з іншими складовими виразу для K_3.

Функцію $J(s,\tau)$ запишемо у вигляді

$$J(s,\tau)=J_1(s,\tau)+J_2(s,\tau), \tag{16}$$

де

$$J_1(s,\tau)=\int\limits_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho\int\limits_0^1\left[Z_0(\rho,y,\tau,0)-Z_0(\rho,0,\tau,0)\right]\mu_0(\tau,dy).$$

$$J_2(s,\tau)=\int\limits_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}d\rho\int\limits_0^1\left[Z_0(\rho,0,\tau,0)-Z_0(\rho,y,\tau,0)\right]\left(\mu_0(\tau,dy)-\mu_0(\rho,dy)\right),$$

Знайдемо оцінку для $J_1(s,\tau)$.

$$|J_1(s,\tau)|\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\left|\int\limits_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}(\tau-\rho)^{-\frac{1}{2}}d\rho\int\limits_0^1\mu_0(\tau,dy)\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial\theta}e^{\frac{-y^2\theta}{2b\cdot(\tau-\rho)}}d\theta\right|$$

$$=\frac{1}{2b\sqrt{2\pi b}}\left|\int\limits_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}(\tau-\rho)^{-\frac{3}{2}}d\rho\int\limits_0^1 y\mu_0(\tau,dy)\int\limits_0^1 ye^{\frac{-y^2\theta}{2b\cdot(\tau-\rho)}}d\theta\right|$$

$$=\frac{1}{2b\sqrt{2\pi b}}\left|\int\limits_0^1 y\mu_0(\tau,dy)\int\limits_0^1 ye^{\frac{-y^2\theta}{2b\cdot(\tau-s)}}d\theta\int\limits_s^\tau(\rho-s)^{-\frac{1}{2}}(\tau-\rho)^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{-y^2\theta}{2b\cdot(\tau-s)}\frac{\rho-s}{\tau-\rho}}d\rho\right|$$

$$= \frac{1}{2b\sqrt{2\pi b}(\tau - s)} \left| \int\limits_0^1 y\mu_0(\tau, dy) \int\limits_0^1 y e^{\frac{-y^2\theta}{2b\cdot(\tau-s)}} d\theta \int\limits_0^\infty z^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-y^2\theta}{2b\cdot(\tau-s)}\cdot z} dz \right| \le c(\tau - s)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (17)$$

Розглянемо $J_2(s,\tau)$. Використовуючи формулу Лагранжа для різниці $Z_0(\rho,0,\tau,0) - Z_0(\rho,y,\tau,0)$, отримуємо

$$J_2(s,\tau) = \int\limits_s^\tau (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} d\rho \int\limits_0^1 y \frac{\partial Z_0(\rho,x,\tau,0)}{\partial x}\bigg|_{x=\theta y} (\mu_0(\tau,dy) - \mu_0(\rho,dy))$$

$$= \int\limits_s^\tau (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} (\tau-\rho)^{-1} d\rho \int\limits_0^1 y(\tau-\rho) \frac{\partial Z_0(\rho,x,\tau,0)}{\partial x}\bigg|_{x=\theta y} (\mu_0(\tau,dy) - \mu_0(\rho,dy)), \qquad (18)$$

де θ — деяке число з інтервалу $(0,1)$.

Оскільки функції $f_{\tau,\,\rho}(y) = (\tau-\rho)\frac{\partial Z_0(\rho,x,\tau,0)}{\partial x}\big|_{x=\theta y}$ належать до класу $C_b(\overline{D})$ для всіх $0 \le s < \rho < \tau < t \le T$ і обмежені деякою сталою на цій множині (див. (7) при $r = 0,\ p = 1$), то, згідно з твердженням леми 2.1, справджується нерівність

$$\left| \int\limits_0^1 y(\tau-\rho) \frac{\partial Z_0(\rho,x,\tau,0)}{\partial x}\bigg|_{x=\theta y} (\mu_0(\tau,dy) - \mu_0(\rho,dy)) \right| \le c(\tau-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}, \qquad (19)$$

де $0 \le s < \rho < \tau < t \le T$.

Із співвідношень (18) і (19) випливає наступна оцінка для $J_2(s,\tau)$:

$$|J_2(s,\tau)| \le c(\tau - s)^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}. \qquad (20)$$

Враховуючи (16), (17), (20), встановлюємо, що

$$|J(s,\tau)| \le c(\tau - s)^{-\frac{1}{2}}.$$

Неважко переконатися в тому, що така сама нерівність буде справджуватися і для $K_3(s,\tau)$. Об'єднуючи знайдені оцінки, отримуємо (14).

Далі, розглянемо функцію $\Psi(s,t,\varphi)$, яка входить до рівняння (13). Для неї можна записати формулу

$$\Psi(s,t,\varphi) = \sqrt{\frac{2b(s,0)}{\pi}} \Bigg(\frac{1}{2} \int\limits_s^t (\rho - s)^{-\frac{3}{2}} \left[u_0(\rho,0,t) - u_0(s,0,t)\right] d\rho$$

$$- [u_0(s,0,t) - \varphi(0)](t-s)^{-\frac{1}{2}} - \int\limits_s^t (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} \Bigg[-\zeta_0(\rho) \frac{\partial u_0(\rho,0,t)}{\partial x}$$

$$+ \gamma_0(\rho) u_0(\rho,0,t) + \int\limits_D [u_0(\rho,0,t) - u_0(\rho,y,t)]\mu_0(\rho,dy) \Bigg] d\rho \Bigg). \qquad (21)$$

Застосовуючи формулу Лагранжа для приростів $u_0(\rho,0,t) - u_0(s,0,t)$ та $u_0(\rho,0,t) - u_0(\rho,y,t)$, що входять до відповідних інтегралів у правій частині (21), а також враховуючи вигляд функції u_0 та нерівності (7), доводимо (15).

Оцінки (14) і (15) забезпечують існування неперервного для $s \in [0,t)$ розв'язку рівняння (13), який знаходиться за допомогою методу послідовних наближень:

$$V(s,t,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} V^{(k)}(s,t,\varphi), \quad 0 \le s < t \le T,$$

де

$$V^{(0)}(s,t,\varphi) = \psi(s,t,\varphi), \quad V^{(k)}(s,t,\varphi) = \int\limits_s^t K(s,\tau)V^{(k-1)}(\tau,t,\varphi)d\tau, \quad k = 1,2,\dots.$$

Крім того, для функції V виконується нерівність

$$|V(s,t,\varphi)| \le c\|\varphi\|(t-s)^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 \le s < t \le T. \tag{22}$$

З допомогою оцінок (7) і (22) ми доводимо, що побудована функція $u(s,x,t)$ є розв'язком задачі (4)–(6) з класу

$$C^{1,2}([0,t) \times D) \cap C([0,t] \times \overline{D}), \tag{23}$$

і для нього справджується нерівність

$$|u(s,x,t)| \le c\|\varphi\|, \quad 0 \le s < t \le T, \quad x \in \overline{D}. \tag{24}$$

Зауваження 3.1. *Якщо послідовність $\varphi_n \in C_b(\mathbb{R})$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ і, крім того, $\sup\limits_n \|\varphi_n\| < \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} V(s,t,\varphi_n) = V(s,t,\varphi)$ для всіх $0 \le s < t \le T$.*

Зауваження 3.2. *Гладкість функції φ впливає на поведінку $V(s,t,\varphi)$ при $s \uparrow t$. Зокрема, якщо $\varphi \in C_b^{(2)}(\mathbb{R})$, то розв'язок рівняння (13) є неперервною функцією для $s \in [0,t]$. При цьому*

$$|V(s,t,\varphi)| \le c(t-s)^{\frac{1}{2}}.$$

Обгрунтуємо тепер, що побудований розв'язок $u(s,x,t)$ задачі (4)–(6) є її єдиним розв'язком з класу (23). Для цього достатньо зауважити, що функцію $u(s,x,t)$ можна розглядати як єдиний розв'язок параболічної першої крайової задачі:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U(s,x,t)}{\partial s} + \frac{1}{2}b(s,x)\frac{\partial^2 U(s,x,t)}{\partial x^2} + a(s,x)\frac{\partial U(s,x,t)}{\partial x} = 0,\ 0 \le s < t \le T,\ x \in D,\\
&\lim_{s\uparrow t} U(s,x,t) = \varphi(x), \quad x \in D,\\
&U(s,0,t) = v(s,t), \quad 0 \le s < t \le T,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
v(s,t) =& \varphi(0) - \int\limits_s^t \Bigg(- \zeta_0(\tau)\frac{\partial u}{\partial x}(\tau,0,t) + \gamma_0(\tau)u(\tau,0,t)\\
&+ \int\limits_D \left[u(\tau,0,t) - u(\tau,y,t)\right]\mu_0(\tau,dy)\Bigg)d\tau,
\end{aligned}$$

і виконується умова узгодження

$$\lim_{s\uparrow t} v(s,t) = \varphi(0).$$

Отже, доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів оператора A_s з (1), функцій $\sigma,\ \zeta,\ \gamma$ і міри μ з (2) виконані умови a), b) та 1)–3). Тоді для будь-якої функції $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ задача (4)–(6) має єдиний розв'язок з класу (23). Більше того, цей розв'язок зображується у вигляді (9) і задовольняє нерівність (24).*

4 Побудова процесу

Визначимо двопараметричну сім'ю лінійних операторів $T_{st},\ 0 \le s < t \le T$, які діють на функцію $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ за формулою

$$T_{st}\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(s,x,t,y)\varphi(y)dy + \int\limits_{s}^{t} G(s,x,\tau,0)V(\tau,t,\varphi)d\tau, \tag{25}$$

де функція V є розв'язком інтегрального рівняння Вольтерра другого роду (13). Покажемо, що оператори T_{st} володіють такими властивостями:

i) якщо $\varphi(x) \ge 0$ для всіх $x \in \overline{D}$, то й $T_{st}\varphi(x) \ge 0$, для всіх $0 \le s < t \le T,\ x \in \overline{D}$;

ii) оператори T_{st} — стискуючі, тобто $\|T_{st}\| \le 1$ для всіх $0 \le s < t \le T$;

iii) сім'я операторів T_{st} є мультиплікативною, тобто для всіх $0 \le s < u < t \le T$ виконується співвідношення

$$T_{st} = T_{su}T_{ut}. \tag{26}$$

Властивість *i*) достатньо довести для випадку, коли функція φ — фінітна (див. зауваження 3.1). Зафіксуємо довільне $t \in (0,T]$. Нехай $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ — фінітна і така, що $\varphi(x) \ge 0$ в області $\overline{D}$.

Якщо $\varphi(x) = 0$ для всіх $x \in \overline{D}$, то з теореми 2 випливає, що й $T_{st}\varphi(x) = 0$, для всіх $x \in \overline{D},\ s \in [0,t]$. Отже, в цьому випадку властивість *i*) виконується.

Надалі, будемо вважати, що φ не скрізь дорівнює нулю на $\overline{D}$. Позначимо через m — мінімум функції $T_{st}\varphi(x)$ в області $(s,x) \in [0,t] \times \overline{D}$. Якщо припустити, що $m < 0$, то з принципу максимуму (див. [7, гл. II]) випливає, що значення m може досягатися лише при $(s,x) \in (0,t) \times \{0\}$. Зафіксуємо $s_0 \in (0,t)$, для якого $T_{s_0t}\varphi(0) = m$. Тоді, враховуючи теорему 14 з [7, стор. 69], бачимо, що виконання крайової умови (6) в деякому околі точки s_0 є неможливим. Отримана суперечність вказує на те, що $m \ge 0$, що й треба було довести.

Властивість *ii*) доводиться аналогічно до *i*) з використанням принципу максимуму.

Для доведення *iii*) достатньо зауважити, що функція $T_{su}T_{ut}\varphi(x),\ 0 \le s < u < t \le T,\ x \in \overline{D}$, є розв'язком задачі (4)–(6) з класу (23) і цей розв'язок єдиний, що й забезпечує виконання рівності (26).

Враховуючи властивості $i) - iii)$, робимо висновок ([2, стор. 79, теор. 2.1]), що мультиплікативна сім'я операторів $T_{st},\ 0 \le s < t \le T$, визначає деякий неоднорідний процес Феллера на $\overline{D}$. Нехай $P(s,x,t,dy)$ — його ймовірність переходу, тоді для всіх $\varphi \in C_b(\overline{D})$ справджується рівність

$$T_{st}\varphi(x) = \int\limits_{\overline{D}} P(s,x,t,dy)\varphi(y).$$

Використовуючи інтегральне зображення мультиплікативної сім'ї операторів T_{st}, можна визначити її інфінітезимальний оператор $\widetilde{A}_s,\ s \in [0,T]$. За означенням

$$\widetilde{A}_s f(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_{s\ s+h} f(x) - f(x)}{h},$$

при умові, що границя існує (в розумінні збіжності по нормі). Підрахувавши дану границю для довільної функції $f \in C^{(2)}_{\text{рівн}}(\overline{D})$, встановлюємо, що

$$\widetilde{A}_s f(x) = \begin{cases} A_s f(x), & \text{якщо } x > 0, \\ \zeta_0(s)f'(0) - \gamma_0(s)f(0) - \int\limits_D [f(0) - f(y)]\mu_0(s,dy), & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що $\widetilde{A}_s f = A_s f$ тоді і лише тоді, коли виконується крайова умова (3). Отже, доведено наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді мультиплікативна сім'я операторів* $T_{st},\ 0 \le s < t \le T$, *заданих формулою (25), описує неоднорідний процес Феллера на* $\overline{D}$, *генератор* $\widetilde{A}_s$ *якого визначений на всіх функціях* $f \in C^{(2)}_{\text{рівн}}(\overline{D})$, *таких, що задовольняють умову (3), і для цих функцій* $\widetilde{A}_s f = A_s f$.

Література

1. Вентцель А.Д. *Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка* // Докл. АН СССР. Математика. — 1956. — Т.111, №2. — С. 269–272.
2. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1963. — 860 с.
3. Кононечук П.П., Копитко Б.І. *Про напівгрупу операторів Феллера, яка описує процес дифузії на півпрямій з нелокальною граничною умовою* // Матем. вісник НТШ. — 2007. — Т.4. — С. 129–138.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
5. Портенко М.І. Процеси дифузії в середовищах з мембранами. — К.: Інститут математики НАН України, 1995. — 200 с.
6. Скубачевский А.Л. *Неклассические краевые задачи. I* // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — Т.26. — С. 3–132.
7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. — 427 с.

8. Kononchuk P., Kopytko B. *Diffusion processes on a half-line with Feller-Wentzel boundary condition that correspond to reflection and jumps*, Theory of Stochastic Processes, **16 (32)**, 2 (2010), 54–62.

9. Kononchuk P. *One-dimensional model of the diffusion process with a membrane that is described by the Feller-Wentzel conjugation condition*, Theory of Stochastic Processes, **17 (33)**, 1 (2011), 61–69.

10. Feller W. *Generalized second order differential operators and their lateral conditions*, Illinois J. Math., **1** (1957), 495–504.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна

Надійшло 13.09.2011

Kopytko B., Shevchuk R. *An inhomogeneous diffusion process model on a half-line with general boundary condition of Feller-Wentzel*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 2 (2011), 88–99.

By means of the methods of classic potential theory the multiplicative operator family is constructed that describes an inhomogeneous diffusion process on a half-line with general boundary condition of Feller-Wentzel.

Копытко Б., Шевчук Р. *Модель процесса неоднородной диффузии на полупрямой с общим граничным условием Феллера-Вентцеля* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №2. — С. 88–99.

Пользуясь методами классической теории потенциала, построено мультипликативное семейство операторов, описывающих неоднородный диффузионный процесс на полупрямой с общим граничным условием Феллера-Вентцеля.