Карпатські математичні
публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.4, №1

УДК 512.538

Стефлюк С.Д.

ДВА КЛАСИ ВЗАЄМНО ОБЕРНЕНИХ МНОГОЧЛЕНІВ РОЗБИТТІВ

Стефлюк С.Д. *Два класи взаємно обернених многочленів розбиттів* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 145–154.

При допомозі парафункцій трикутних матриць досліджуються два класи взаємно обернених многочленів розбиттів.

1 Вступ

У [8] були введені многочлени від багатьох змінних, пов'язані із диференціюванням складних функцій (формула Бруно), в яких підсумовування проводиться за невпорядкованими розбиттями натурального числа на натуральні доданки. У монографії Ріордана [5] ці многочлени були названі многочленами Белла. Циклові індикатори симетричних груп (див. [5, с. 82–85]) також є деякими многочленами розбиттів. Многочлени розбиттів з'являються також у формулі Варінга [6], в якій степеневі суми виражаються через елементарні симетричні многочлени та у багатьох інших випадках. Дослідження властивостей деяких многочленів розбиттів їх узагальнень та інтерпретацій можна знайти також у роботах Платонова [4], Кузьміна і Леонової [2], [3].

Взаємно обернені пари многочленів розбиттів

$$y_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} c(n;\lambda_1,\ldots\lambda_n)\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$x_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} d(n;\lambda_1,\ldots\lambda_n)\cdot y_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}$$

виникають, зокрема, у теорії чисел (див. [1, с. 304–307]) та теорії симетричних многочленів (див. [1, с. 336–338]).

У статті вивчаються два загальні класи взаємно обернених многочленів розбиттів.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.
Ключові слова і фрази: парафункцій трикутних матриць, многочленів розбиттів.

2 Основні поняття про парафункції трикутних матриць та многочлени розбиттів

Нехай K — деяке числове поле.

Означення 2.1. [1]. *Трикутну таблицю*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1}$$

чисел із числового поля K назвемо **трикутною матрицею**, *елемент a_{11} — верхнім елементом цієї трикутної матриці, а число n — її порядком.*

Означення 2.2. [1]. *Нехай A — трикутна матриця (1). Парадетермінантом та параперманентом трикутної матриці A називають відповідно числа:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

$$\operatorname{pper(A)} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

де підсумовування проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = n$, а символом $\{a_{i,j}\}$ позначено факторіальний добуток елемента $a_{i,j}$, що задається рівністю $\{a_{ij}\} = \prod\limits_{k=j}^{i} a_{ik}$.

Розглянемо трикутну матрицю вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \tau_{11} \cdot x_1 & & & \\ \tau_{21} \cdot \frac{x_2}{x_1} & \tau_{22} \cdot x_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \tau_{n1} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{nn} \cdot x_1 \end{pmatrix}_n = \left(\tau_{ij} \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right)_{1 \le j \le i \le n}, \tag{2}$$

де $x_0 = 1$, τ_{ij} — деякі дробово-раціональні функції аргументів i, j.

Означення 2.3. *Многочленами розбиттів назвемо многочлени виду*

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} c(n; \lambda_1, \ldots \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

де λ_i — цілі невід'ємні числа, а $c(n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — деякі дробово-раціональні вирази.

У [1] доведено, що парафункції трикутних матриць виду (2) є матричними зображеннями деяких многочленів розбиттів, причому справедлива теорема

Теорема 1. *Справедливі наступні формули обернення многочленів розбиттів:*
1)

$$y_i = \left\langle \tau_{sr} \frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}, \quad x_i = \left\langle \tau^{-1}_{s,s-r+1} \frac{y_{s-r+1}}{y_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}, \ i = 1, 2, \ldots;$$

2)

$$y_i = \left[\tau_{sr} \frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}} \right]_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}, \quad x_i = (-1)^{i-1} \left\langle \tau^{-1}_{s,s-r+1} \frac{y_{s-r+1}}{y_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}, \ i = 1, 2, \ldots.$$

Таким чином, при допомозі теореми 1 можна будувати загальні класи взаємно обернених многочленів розбиттів. Для цього потрібно так підібрати елементи τ_{ij} у матриці (2), щоб парафункції матриць із цієї теореми можна було явно виразити у вигляді сум за невпорядкованими розбиттями.

Теорема 2. [7]. *Нехай*

$$Z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & & \\ \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & & & & \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & x_1 & & & \\ 0 & \frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix}_m, \ n \leqslant m,$$

тоді справедливі тотожності:

$$\operatorname{pper}(Z_m(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$\operatorname{ddet}(Z_m(x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m} (-1)^{m-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $\lambda_i, \ i = 1, 2, \ldots, n,$ *— цілі невід'ємні числа.*

3 Взаємно обернені многочлени розбиттів

Теорема 3. *Справедливі рівності:*

$$y_n = \left\langle \begin{matrix} a_1 x_1 & & & & \\ \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1 x_1 & & & \\ \frac{a_3}{a_2}\frac{x_3}{x_2} & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1 x_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1 x_1 \end{matrix} \right\rangle_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} k! \frac{a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$x_n = \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{a_1}y_1 & & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_1}{a_2}y_1 & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_3}{y_2} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_2}{a_3}y_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \cdots & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_{n-1}}{a_n}y_1 \end{matrix} \right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{a_n}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n=1,2,\ldots, \tag{4}$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$. *Причому взаємно обернені многочлени розбиттів (3), (4) задовольняють відповідно рекурентні рівності*

$$y_n = a_1x_1y_{n-1}+\ldots+(-1)^{n-2}a_{n-1}x_{n-1}y_1+(-1)^{n-1}a_nx_ny_0,\ y_0=1, y_{<0}=0, \tag{5}$$

$$x_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}y_1x_{n-1}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{a_1}{a_n}y_{n-1}x_1+(-1)^{n-1}\frac{1}{a_n}y_nx_0,\ x_0=1, x_{<0}=0. \tag{6}$$

Доведення. Для доведення рівностей (3), (4) достатньо замінити у теоремі 2 при $m=n$ змінні $x_i, i=1,2,\ldots$, виразами a_ix_i. Далі слід зауважити, що многочлени розбиттів (3), (4), внаслідок теореми 1, взаємно обернені до многочленів розбиттів (3). Винесемо із j-го стовпця ($j=1,2,\ldots$) за знак парадетермінанта множник $\frac{a_{j-1}}{a_j}$, (тут ми вважаємо, що $a_0=1$) тоді отримаємо очевидні рівності

$$x_n = \frac{1}{a_1}\frac{a_1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_n}\left\langle\frac{y_{i-j+1}}{y_{i-j}}\right\rangle_{1\le j\le i\le n}$$

$$= \frac{1}{a_n}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-k}\cdot\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n=1,2,\ldots$$

Для доведення того факту, що многочлени розбиттів (3), (4) задовольняють відповідно рекурентні рівності (5), (6) достатньо розкласти парадетермінанти із рівностей (3), (4) за елементами останнього рядка. □

Теорема 4. *Справедливі рівності:*

$$y_n = \left[\begin{matrix} a_1x_1 & & & & \\ \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & & & \\ \frac{a_3}{a_2}\frac{x_3}{x_2} & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1}\frac{x_2}{x_1} & a_1x_1 \end{matrix} \right]_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} k!\frac{a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \quad n=1,2,\ldots,$$

$$x_n = (-1)^{n-1}\left\langle \begin{array}{ccccc} \frac{1}{a_1}y_1 & & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_1}{a_2}y_1 & & & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_3}{y_2} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_2}{a_3}y_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{a_1}\frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{a_1}{a_2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \cdots & \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\frac{y_2}{y_1} & \frac{a_{n-1}}{a_n}y_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{a_n}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n=1,2,\ldots,$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$. *Причому взаємно обернені многочлени розбиттів (3), (4) задовольняють відповідно рекурентні рівності*

$$y_n = a_1x_1y_{n-1} + a_2x_2y_{n-2} + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}y_1 + a_nx_ny_0,\ y_0 = 1, y_{<0} = 0,$$

$$x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}y_1x_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{a_n}y_2x_{n-2} - \ldots - \frac{a_1}{a_n}y_{n-1}x_1 + \frac{1}{a_n}y_nx_0,\ x_0 = 1, x_{<0} = 0.$$

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 3.

4 Приклади взаємно обернених многочленів розбиттів

1. Розглянемо перший випадок, при $a_i = i!$, де $i = 1, 2, \ldots, n$, отримаємо:

$$y_n = 1!x_1y_{n-1} - 2!x_2y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}(n-1)!x_{n-1}y_1 + (-1)^{n-1}(n)!x_ny_0,\ y_0 = 1, y_{<0} = 0.$$

$$y_n = \left\langle \begin{array}{ccccc} x_1 & & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ 3\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ n\frac{x_n}{x_{n-1}} & (n-1)\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-k}k!\frac{1!^{\lambda_1}2!^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n!^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \quad n=1,2,\ldots, \tag{7}$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

$$x_n = \frac{1}{n^{\underline{1}}}y_1x_{n-1} - \frac{1}{n^{\underline{2}}}y_2x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{n^{\underline{n-1}}}y_{n-1}x_1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\underline{n}}}y_nx_0,\ x_0 = 1, x_{<0} = 0.$$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{ccccc} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2}y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{3}y_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{1}{2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \cdots & \frac{1}{n-1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{n}y_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-k}\cdot\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n=1,2,\ldots.$$

2. Розглянемо другий випадок, при $a_i = \frac{1}{i!}$, де $i = 1, 2, \ldots, n$ будемо мати:

$$y_n = \frac{1}{1!}x_1 y_{n-1} - \frac{1}{2!}x_2 y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)!}x_{n-1}y_1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n)!}x_n y_0,\ y_0 = 1, y_{<0} = 0.$$

$$y_n = \left\langle \begin{array}{ccccc} x_1 & & & & \\ \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{1}{3}\frac{x_3}{x_2} & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{n}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{1}{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot(1!)^{\lambda_1}\cdot\lambda_2\cdot(2)!^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n\cdot(n!)^{\lambda_n}} x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

$$x_n = n^{\underline{1}}y_1 x_{n-1} - n^{\underline{2}}y_2 x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}n^{\underline{n-1}}y_{n-1}x_1 + (-1)^{n-1}n^{\underline{n}}y_n x_0,\ x_0 = 1, x_{<0} = 0.$$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{ccccc} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & 2y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & 2\frac{y_2}{y_1} & 3y_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & 2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \cdots & (n-1)\frac{y_2}{y_1} & ny_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}\cdot\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

3. Розглянемо третій випадок, при $a_i = i$, де $i = 1, 2, \ldots, n$, отримаємо:

$$y_n = x_1 y_{n-1} - 2x_2 y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}(n-1)x_{n-1}y_1 + (-1)^{n-1}nx_n y_0,\ y_0 = 1, y_{<0} = 0.$$

$$y_n = \left\langle \begin{array}{ccccc} x_1 & & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{3}{2}\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{n}{n-1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{n-1}{n-2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k}k!\frac{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

$$x_n = \frac{n-1}{n}y_1 x_{n-1} - \frac{n-2}{n}y_2 x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{n}y_{n-1}x_1 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}y_n x_0,\ x_0 = 1, x_{<0} = 0.$$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{lllll} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2}y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{2}{3}y_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{1}{2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \cdots & \frac{n-2}{n-1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{n-1}{n}y_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \cdot \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

4. Розглянемо випадок при $a_i = \frac{1}{i}$, де $i = 1, 2 \ldots, n$, отримаємо:

$$y_n = x_1 y_{n-1} - \frac{1}{2} x_2 y_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{1}{n-1} x_{n-1} y_1 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x_n y_0,\ y_0 = 1, y_{<0} = 0.$$

$$y_n = \left\langle \begin{array}{lllll} x_1 & & & & \\ \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{2}{3}\frac{x_3}{x_2} & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{n-1}{n}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{n-2}{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{1^{\lambda_1} \cdot \lambda_1! \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n} \cdot \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

$$x_n = \frac{n}{n-1} y_1 x_{n-1} - \frac{n}{n-2} y_2 x_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} n \cdot y_{n-1} x_1 + (-1)^{n-1} n \cdot y_n x_0,\ x_0 = 1, x_{<0} = 0.$$

$$x_n = \left\langle \begin{array}{lllll} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & 2y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & 2\frac{y_2}{y_1} & \frac{2}{3}y_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & 2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \cdots & \frac{n-1}{n-2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{n}{n-1}y_1 \end{array} \right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-k} \cdot \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Підставивши у теорему 4 ті ж значення, що і в теорему 3, отримаємо:

Теорема 5. *При* $a_i = i!$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$y_n = \left[\begin{array}{lllll} x_1 & & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ 3\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ n\frac{x_n}{x_{n-1}} & n-1\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right]_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} k! \frac{1!^{\lambda_1} 2!^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n!^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

$$x_n=(-1)^{n-1}\left\langle\begin{array}{ccccc} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2}y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{3}y_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{1}{2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \cdots & \frac{1}{n-1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{n}y_1 \end{array}\right\rangle_n$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n},\quad n=1,2,\ldots,\tag{9}$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$. *Причому взаємно обернені многочлени розбиттів (8), (9) задовольняють відповідно рекурентні рівності*

$$y_n=x_1y_{n-1}+2!x_2y_{n-2}+\ldots+(n-1)!x_{n-1}y_1+n!x_ny_0,\ y_0=1, y_{<0}=0,$$

$$x_n=-\frac{1}{n^{\underline{1}}}y_1x_{n-1}-\frac{1}{n^{\underline{2}}}y_2x_{n-2}-\ldots-\frac{1}{n^{\underline{n-1}}}y_{n-1}x_1+\frac{1}{n^{\underline{n}}}y_nx_0,\ x_0=1, x_{<0}=0.$$

Теорема 6. *При* $a_i=\frac{1}{i!}$, $i=1,2,\ldots,n$,

$$y_n=\left[\begin{array}{ccccc} x_1 & & & & \\ \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{1}{3}\frac{x_3}{x_2} & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{n}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{1}{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array}\right]_n$$

$$=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}\frac{k!}{1!^{\lambda_1}\cdot\lambda_1!\cdot 2!^{\lambda_2}\cdot\lambda_2!\cdot\ldots\cdot n!^{\lambda_n}\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},\quad n=1,2,\ldots.\tag{10}$$

$$x_n=(-1)^{n-1}\left\langle\begin{array}{ccccc} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & 2y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & 2\frac{y_2}{y_1} & 3y_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & 2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \cdots & (n-1)\frac{y_2}{y_1} & ny_1 \end{array}\right\rangle_n$$

$$=n!\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n},\quad n=1,2,\ldots,\tag{11}$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$. *Причому взаємно обернені многочлени розбиттів (10), (11) задовольняють відповідно рекурентні рівності*

$$y_n=x_1y_{n-1}+\frac{1}{2!}x_2y_{n-2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}x_{n-1}y_1+\frac{1}{n!}x_ny_0,\ y_0=1, y_{<0}=0,$$

$$x_n=-n^{\underline{1}}y_1x_{n-1}-n^{\underline{2}}y_2x_{n-2}-\ldots-n^{\underline{n-1}}y_{n-1}x_1+n^{\underline{n}}y_nx_0,\ x_0=1, x_{<0}=0.$$

Теорема 7. *При* $a_i=\frac{1}{i}$, $i=1,2,\ldots,n$,

$$y_n=\left[\begin{array}{ccccc} x_1 & & & & \\ \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{2}{3}\frac{x_3}{x_2} & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{n-1}{n}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{n-2}{n-1}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array}\right]_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{k!}{1^{\lambda_1}\cdot\lambda_1!\cdot 2^{\lambda_2}\cdot\lambda_2!\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}\cdot\lambda_n!} x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \quad n=1,2,\ldots. \tag{12}$$

$$x_n = (-1)^{n-1}\left\langle \begin{array}{ccccc} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & 2y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & 2\frac{y_2}{y_1} & \frac{3}{2}y_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & 2\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & \frac{n-1}{n-2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{n}{n-1}y_1 \end{array}\right\rangle_n$$

$$= n \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n=1,2,\ldots, \tag{13}$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$. *Причому взаємно обернені многочлени розбиттів (12), (13) задовольняють відповідно рекурентні рівності*

$$y_n = x_1y_{n-1} + \frac{1}{2}x_2y_{n-2} + \ldots + \frac{1}{n-1}x_{n-1}y_1 + \frac{1}{n}x_ny_0,\ y_0=1, y_{<0}=0,$$

$$x_n = -\frac{n}{n-1}y_1x_{n-1} - \frac{n}{n-2}y_2x_{n-2} - \ldots - ny_{n-1}x_1 + ny_nx_0,\ x_0=1, x_{<0}=0.$$

Теорема 8. *При* $a_i=i$, $i=1,2,\ldots,n$,

$$y_n = \left[\begin{array}{ccccc} x_1 & & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{3}{2}\frac{x_3}{x_2} & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{n}{n-1}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{n-1}{n-2}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array}\right]_n$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} k!\frac{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}, \quad n=1,2,\ldots. \tag{14}$$

$$x_n = (-1)^{n-1}\left\langle \begin{array}{ccccc} y_1 & & & & \\ \frac{y_2}{y_1} & \frac{1}{2}y_1 & & & \\ \frac{y_3}{y_2} & \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_1} & \frac{2}{3}y_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \frac{y_n}{y_{n-1}} & \frac{1}{2}\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} & \ldots & \frac{n-2}{n-1}\frac{y_2}{y_1} & \frac{n-1}{n}y_1 \end{array}\right\rangle_n$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{k-1}\frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot y_n^{\lambda_n}, \quad n=1,2,\ldots, \tag{15}$$

де $k=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$. *Причому взаємно обернені многочлени розбиттів (14), (15) задовольняють відповідно рекурентні рівності*

$$y_n = x_1y_{n-1} + 2x_2y_{n-2} + \ldots + (n-1)x_{n-1}y_1 + nx_ny_0,\ y_0=1, y_{<0}=0,$$

$$x_n = -\frac{n-1}{n}y_1x_{n-1} - \frac{n-2}{n}y_2x_{n-2} - \ldots - \frac{1}{n}y_{n-1}x_1 + \frac{1}{n}y_nx_0,\ x_0=1, x_{<0}=0.$$

Література

1. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування. — Івано-Франківськ: Сімик, 2010. — 508 с.
2. Кузьмин О.В. *Рекуррентные соотношения и перечислительные интерпретации некоторых комбинаторных чисел и полиномов* // Дискретная математика. — 1994. — Т.6, №3. — С. 39–49.
3. Кузьмин О.В., Леонова О.В. *О полиномах разбиений* // Дискретная математика. — 2001. — Т.13, №2. — С. 144–158.
4. Платонов М.Л. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. — М.: Наука, 1979. — 154 с.
5. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М.: ИЛ, 1963.
6. Серре И.А. Курс высшей алгебры. — М.: Изд-во т-ва М.О. Вольф, 1902.
7. Заторський Р.А. *Парафункції матриць похилої структури та многочлени розбиттів* // Наук. вісн. Чернівецького нац. ун-ту. Математика. — 2011. — Т.1, №4. — С. 59–66.
8. Bell E.T. *Partition polynomials*, Ann. Math., **29** (1927), 38–46.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 10.04.2012

Stefluk S.D. *Two classes of mutually inverse polynomials of partitions*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 145–154.

By means of triangular matrices parafunctions two classes of mutually inverse polynomial of partitions are investigated.

Стефлюк С.Д. *Два класса взаимно обратных многочленов разбиений* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 145–154.

При помощи парафункций треугольных матриц исследуются два класса взаимно обратных многочленов разбиений.