Карпатські математичні
публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.1, No.1

УДК 519.217.4

Осипчук М.М.

ІСНУВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ЛОКАЛЬНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Осипчук М.М. *Існування дифузійних процесів із заданими локальними характеристиками // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 79–84.

У роботі наведені результати, що стосуються існування узагальнених дифузійних процесів в сепарабельному гільбертовому просторі із заданими локальними характеристиками – вектором переносу і оператором дифузії. Розглянуто деякі властивості таких процесів (еквівалентність мір, зв'язок із стохастичними диференціальними рівняннями).

Нехай $P(t,x,\Gamma)$ $(t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^m,\ \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ — ймовірність переходу однорідного марківського процесу в $\mathbb{R}^m$. Такий процес називається дифузійним, якщо виконуються наступні умови [1]:

1. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_{|y-x|>\varepsilon} P(t,x,dy) = 0$ при всіх $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^m$;
2. Існує така функція $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, що
$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x,\theta) P(t,x,dy) = (a(x),\theta)$$
при всіх $x, \theta \in \mathbb{R}^m$;
3. Існує така функція $b : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^m)$, що
$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x,\theta)^2 P(t,x,dy) = (b(x)\theta,\theta)$$
при всіх $x, \theta \in \mathbb{R}^m$.

При цьому функцію $a(x)$ прийнято називати вектором переносу, а функцію $b(x)$ — матрицею (оператором) дифузії, а їх сукупність — локальними характеристиками дифузійного процесу.

Питання полягає в існуванні для заданих $a(x)$ і $b(x)$ такого дифузійного процесу, щоб ці функції були його вектором переносу та матрицею дифузії відповідно.

Класичним результатом, що дає відповідь на це питання, є така теорема.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 60J60, 60H10.

Теорема 1. *Якщо існують константи $K > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < C_1 \le C_2$, для яких при всіх $x, y, \theta \in \mathbb{R}^m$ та $i, j = 1, 2, \dots, m$:*

1. $|b_{ij}(x) - b_{ij}(y)| \le K|x-y|^\alpha$;
2. $C_1\theta^2 \le (b(x)\theta, \theta) \le C_2\theta^2$;
3. $|a_i(x) - a_i(y)| \le K|x-y|^\alpha$, $|a_i(x)| \le C_2$,

то існує однорідний дифузійний процес з вектором переносу $a(x)$ та оператором дифузії, що задається матрицею $b(x)$.

Серед властивостей цього процесу слід відмітити те, що його ймовірність переходу має щільність $g(t, x, y)$, яка є фундаментальним розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} b_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

На шляху послаблення умов на локальні характеристики дифузійних процесів (в основному вектора переносу) лежить результат М.І.Портенка [2].

Теорема 2. *Якщо функція $b(x)$ така ж, як і в теоремі 1, а функція $a(x)$ така, що при деякому $p > m$*

$$\|a\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |a(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \tag{1}$$

то існує (узагальнений) дифузійний процес з локальними характеристиками $a(x)$ і $b(x)$.

Зауваження 1. *Дифузійний процес, існування якого стверджується в теоремі 2, є узагальненим в тому розумінні, що границі з означення дифузійного процесу існують в узагальненому розумінні, тобто для кожної неперервної фінітної функції $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ мають місце рівності:*

1. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\frac{1}{t}\int_{|y-x|>\varepsilon} P(t, x, dy)dx = 0$;
2. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\frac{1}{t}\int_{|y-x|\le\varepsilon} (y-x, \theta)P(t, x, dy)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(a(x), \theta)dx$;
3. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\frac{1}{t}\int_{|y-x|\le\varepsilon} (y-x, \theta)^2 P(t, x, dy)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(b(x)\theta, \theta)dx$.

Приклад 1. *Для функції $a(x)$ з компактним носієм та степеневою особливістю в початку координат*

$$a(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|^{\alpha+1}}, & \text{при } |x| \le C; \\ 0, & \text{при } |x| > C \end{cases}$$

умова теореми 2 виконується при $\alpha < 1$.

Зауваження 2. *Вектор переносу, який задовольняє умову теореми 2, може мати тільки такі особливості, що дифузійний процес "не помічає" їх. Його траєкторії такі ж, як траєкторії процесу без переносу. Міри, породжені перехідними ймовірностями цих процесів, є еквівалентними:*

$$P_x^a \sim P_x^0.$$

Тут P_x^a *і* P_x^0 *задані на* σ*-алгебрах підмножин* $\Omega = C([0;+\infty))$, *що породжуються множинами виду* $C_{t_1,\dots,t_n}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n) = \{x(t_1) \in \Gamma_1, \dots, x(t_n) \in \Gamma_n\}$, $t_i \in [0;+\infty)$, $t_{i+1} > t_i$, $\Gamma_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P_x^0(C_{t_1,\dots,t_n}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)) =$$

$$= \int_{\Gamma_1} P_0(t_1, x, dy_1) \int_{\Gamma_2} P_0(t_2 - t_1, y_1, dy_2) \dots \int_{\Gamma_n} P_0(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n)$$

$$P_x(C_{t_1,\dots,t_n}(\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)) =$$

$$= \int_{\Gamma_1} P(t-1, x, dy_1) \int_{\Gamma_2} P(t_2 - t_1, y_1, dy_2) \dots \int_{\Gamma_n} P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n)$$

де $P_0(t,x,\Gamma)$ — *ймовірність переходу дифузійного процесу з нульовим переносом та матрицею дифузії* $b(x)$.

Слабші вимоги на вектор переносу, при яких існує узагальнений дифузійний процес з вектором переносу $a(x)$ та матрицею дифузії $b(x)$, розглянуто в [4].

Теорема 3. *Якщо існують константи* $K > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < C_1 \le C_2$, $\delta > 0$, $\gamma > -\frac{\delta+1}{2} + \frac{m}{2}$ *для яких при всіх* $x, y, \theta \in \mathbb{R}^m$ *та* $i, j = 1, 2, \dots, m$:

1. $|b_{ij}(x) - b_{ij}(y)| \le K|x-y|^\alpha$;
2. $C_1\theta^2 \le (b(x)\theta, \theta) \le C_2\theta^2$;
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} |a(y)|^{1+\delta} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{t}\right\} dy \le Kt^\gamma$,

то існує однорідний узагальнений дифузійний процес з вектором переносу $a(x)$ *та матрицею дифузії* $b(x)$.

Доведення. Зауважимо, що умови 1 і 2 гарантують існування дифузійного процесу з нульовим переносом та матрицею дифузії $b(x)$ (див. теорему 1).

Випадковий процес, про існування якого стверджується в теоремі, задається визначеною на множині обмежених вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, напівгрупою операторів

$$T_t\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) g(t,x,y) dy + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} V(t-\tau, y, \varphi)|a(y)| g(\tau, x, y) dy,$$

де $g(t,x,y)$ — щільність ймовірності переходу дифузійного процесу з нульовим переносом та матрицею дифузії $b(x)$, $V(t,x,\varphi)$ — розв'язок рівняння

$$V(t,x,\varphi) = V_0(t,x,\varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^m} V(t-\tau, y, \varphi)|a(y)|(\nabla_x g(\tau,x,y), e(x)) dy \tag{2}$$

з $V_0(t,x,\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi(y)(\nabla_x g(t,x,y),e(x))dy$ та $e(x)=\dfrac{a(x)}{|a(x)|}$ при $|a(x)|>0$.

Умови теореми гарантують існування та єдиність розв'язку рівняння (2) в класі функцій, які задовольняють нерівність $|V(t,x,\varphi)|\le Ct^{-\frac{1}{2}}$. Цей розв'язок можна одержати методом послідовних наближень.

Ймовірність переходу одержаного однорідного марківського процесу задається рівністю $P(t,x,\Gamma)=T_t\mathbb{I}_\Gamma(x)$ $(t>0,\ x\in\mathbb{R}^m,\ \Gamma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. □

Зауваження 3. *Всі функції $a(x)$, для яких виконується умова (1), задовольняють відповідну умову теореми 3. Крім того можна навести приклади, які свідчать про те, що клас векторів переносу з теореми 3 є ширшим:*

$$a(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|\cdot|x|_n^\alpha}, & \text{при } |x|\le C;\\ 0, & \text{при } |x|>C.\end{cases}$$

Тут $\dfrac{n}{m}\le\alpha<1$, $n<m$, $|x|_n=\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Зауваження 4. *При виконанні умов теореми 3 випадковий процес, про існування якого стверджується в теоремі, є слабким розв'язком стохастичного диференціального рівняння*

$$d\xi(t)=a(\xi(t))dt+b^{\frac{1}{2}}(\xi(t))dw(t),$$

що дає змогу моделювати траєкторії такого процесу.

Зауваження 5. *Особливості вектора переносу вже не завжди дозволяють процесу не помічати їх. Для еквівалентності мір, породжених одержаним процесом та процесом з нульовим переносом і тією ж дифузією, приходиться вимагати $\delta>1$ в умові 3 теореми 3. Прикладом такого переносу є функція з обмеженим носієм $a(x)=\dfrac{\tilde{a}}{|x|_1^\alpha}$ при $|x|\le C$, $\frac{1}{2}\le\alpha<1$, $\tilde{a}\in\mathbb{R}^m$.*

Вид наведеної в теоремі 3 умови на вектор переносу дозволяє перенести застосований метод побудови дифузійного процесу на випадок нескінченновимірного простору [3].

Нехай X — сепарабельний гільбертів простір, $\mathcal{B}(X)$ — борелівська σ-алгебра підмножин X, $\mathbf{B}$ — додатний ядерний оператор і $\|\mathbf{B}\|<1$. Позначимо через $P_0(t,x,\cdot)$ гаусівську міру на $\mathcal{B}(X)$ з середнім $x\in X$ та кореляційним оператором $t\mathbf{B}$.

Теорема 4. *Нехай функція $a:X\to X$ задовольняє умови:*

1. *Для майже всіх $x\in X$ за всіма мірами $P_0(t,y,\cdot)$ $(t>0,\ y\in X)$ (далі P_0 - м.в.)*

$$a(x)\in\mathbf{B}^{\frac{1}{2}}X;$$

2. *Існують такі сталі $K>0$, $\delta>0$, $\gamma>-\frac{\delta+1}{2}$, що при $t>0$, P_0 - м.в. $x\in X$*

$$\int_X\left|\mathbf{B}^{-\frac{1}{2}}a(y)\right|^{1+\delta}P_0(t,x,dy)\le Kt^\gamma.$$

Тоді існує неперервний однорідний марківський процес зі значеннями в X, що є узагальненим дифузійним процесом з вектором переносу $a(x)$ та оператором дифузії $b(x) = \mathbf{B}$.

Зауваження 6. *Під узагальненим дифузійним процесом з вектором переносу $a(x)$ та оператором дифузії $b(x)$ в гільбертовому просторі розуміємо такий неперервний марківський процес з ймовірністю переходу $P(t, x, \Gamma)$, для якого існують границі:*

1. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \int\limits_X \varphi(x) \frac{1}{t} \int\limits_X (y - x, \theta) P(t, x, dy) \mu(dx) = \int\limits_X \varphi(x)(a(x), \theta)\mu(dx);$

2. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \int\limits_X \varphi(x) \frac{1}{t} \int\limits_X (y - x, \theta)^2 P(t, x, dy) \mu(dx) = \int\limits_X \varphi(x)(b(x)\theta, \theta)\mu(dx),$

для кожної неперервної обмеженої функції $\varphi : X \to \mathbb{R}$ та деякої гаусової міри μ на $\mathcal{B}(X)$.

Зауваження 7. *Побудований в теоремі 4 випадковий процес є слабким роз'язком стохастичного диференціального рівняння*

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt + dw_B(t),$$

де $w_B(t)$ — так званий $\mathbf{B}$-вінерівський процес, тобто випадковий процес з незалежними приростами, для якого різниці $w_B(t) - w_B(s)$ мають гаусівський розподіл із нульовим середнім та кореляційним оператором $(t - s)\mathbf{B}$.

Література

1. Гихман И.И., Скороход А.В. *Теория случайных процессов.* Т.2. — М.: Наука, 1973. — 640 с.
2. Портенко Н.И. *Обобщенные диффузионные процессы.* — К.:Наук. думка, 1982. — 208 с.
3. Осипчук М.М. *Дифузія з нерегулярним переносом в гільбертовому просторі.* // Укр. матем. журнал. — 1995. — Т.47, №9. — С. 1224–1230.
4. Осипчук М.М. *Дифузія з нерегулярним переносом* // Теорія ймовірн. та мат. стат. — 1996. — Т.54. — С. 122–128.

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна.

Надійшло 23.02.2009

Osypchuk M.M. *Existence of diffusive processes with the given local characteristics*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 79–84.

The results which concern to existence of diffusive processes with the given local characteristics (vector of drift, operator of diffusion) are considered in the article. The processes are examined in separable Hilbert space. Some properties of such processes (equivalence of measures, connection with stochastic differential equations) are also considered.

Осипчук М.М. *Существование диффузионных процессов с заданными локальными характеристиками // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 79–84.

В работе приведены результаты, касающиеся существования обобщенных диффузионных процессов в сепарабельном гильбертовом пространстве с заданными локальными характеристиками – вектором переноса и оператором диффузии. Рассмотрены некоторые свойства таких процессов (эквивалентность мер, связь с стохастическими дифференциальными уравнениями).