Карпатські математичні
публікації. Т.4, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.4, №1

УДК 517.95

Лопушанський А.О.[1], Лопушанська Г.П.[2], Пасічник О.В.[2]

ДВА ФОРМУЛЮВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПІВЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ

Лопушанський А.О., Лопушанська Г.П., Пасічник О.В. *Два формулювання узагальненої задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною за часом* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №1. — С. 72–82.

Запропоновано два еквівалентні формулювання задачі Коші для півлінійного рівняння дробового порядку $\alpha \in (0;1)$ за часом з узагальненою функцією в початковій умові. Доведено теорему існування та єдиності, отримано зображення розв'язку такої задачі для лінійного однорідного рівняння з дробовою похідною за часом.

Вступ

Задачі для рівнянь з дробовими похідними за часом (див., наприклад, [7], [16], [17]) зустрічаються при описі процесів, які протікають у пористих (фрактальних) середовищах. У праці [7] встановлено умови існування класичного розв'язку задачі Коші для однорідного рівняння субдифузії. Актуальним є дослідження задач для рівнянь з дробовими похідними у просторах узагальнених функцій (наприклад, [4], [9]). Як і при дослідженні рівнянь з частинними похідними [3]–[6], [12], [8], [10], важливо виділити умови існування регулярних в області розв'язків, що набувають узагальнених значень на межі. Звідси можливі різні трактування узагальненого розв'язку задачі Коші.

У роботі запропоновано два еквівалентні формулювання задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з узагальненою функцією в початковій умові. Одне з формулювань ґрунтується на формулі Ґріна, у другому формулюванні рівняння та початкова умова розділені. Друге формулювання використовують для знаходження регулярних при $t > 0$ розв'язків. У випадку лінійних рівнянь з частинними похідними доведено, що регулярні в області розв'язки крайових задач із заданими на межі узагальненими функціями належать до вагових просторів з вагами порядків степенів відстані від точки

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K55.
Ключові слова і фрази: півлінійне рівняння, узагальнена функція, ваговий функційний простір, згортка, похідна дробового порядку.

області до межі (степінь залежить від характеру сингулярностей узагальнених крайових значень таких розв'язків). Тому у випадку півлінійних рівнянь природно шукати розв'язки з таких вагових просторів [8]–[14].

1 Основні позначення, означення та допоміжні твердження

Нехай $Q_T = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, t \in (0,T]\}$; $L_{1,loc}(Q_T)$ — простір функцій, інтегровних у кожній обмеженій області, що розміщена строго всередині Q_T; $D(Q_T) := C_0^\infty(Q_T)$, $D(\mathbb{R}^n) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n), n = 1,2$; $D(\bar{Q}_T) := C_0^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C_0^\infty(\bar{Q}_T) : D_t^l \varphi\mid_{t=T} = 0,\ l = 0,1,2,\dots\}$ — простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в $\bar{Q}_\tau$, $\tau < T$; $D'(\mathbb{R})$, $D'(Q_T)$ — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на просторах $D(\mathbb{R})$, $D(Q_T)$ відповідно ([2], [15]); $D'(\bar{Q}_T)$ — сукупність узагальнених функцій f із $D'(\mathbb{R}^2)$ з носіями $\mathrm{supp} f$ в $\bar{Q}_T$ із збіжністю: $f_m \to 0$, $m \to +\infty$ в $D'(\bar{Q}_T)$, якщо $f_m \to 0$, $m \to +\infty$ в $D'(\mathbb{R}^2)$ і $\mathrm{supp} f_m \subset \bar{Q}_T$ ([2, с. 27]); (f,φ) — значення узагальненої функції $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ на основній функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $n = 1,2$.

Зауважимо, що узагальнені функції $f \in D'(\bar{Q}_T)$ є лінійними неперервними функціоналами на $D(\bar{Q}_T)$. Також лінійний неперервний функціонал f на $D(\bar{Q}_T)$ можна трактувати як узагальнену функцію $\tilde{f}$ з $D'(\mathbb{R}^2)$, визначивши $(\tilde{f},\varphi) = (f, h\varphi)$ для кожної $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$, де $h \in D(\mathbb{R})$, $0 \le h(t) \le 1$, $h(t) = 1$ при $t \in [0,T]$, $h(t) = 0$ при $t \notin (-\varepsilon, T+\varepsilon)$, де ε — довільне додатне число, оскільки $(\tilde{f},\varphi) = (f,\varphi)$ на кожній $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$ та $\tilde{f}$ має носій в $\bar{Q}_T$: для кожної $\psi \in D(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_T)$ існує таке $\varepsilon > 0$, що $h(t)\psi(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, а тоді $(\tilde{f},\psi) = (f, h\psi) = (f,0) = 0$, тобто $\tilde{f} = 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}_T$. Очевидно, що функціонал $\tilde{f}$ лінійний та неперервний на $D(\mathbb{R}^2)$.

Через $\hat{*}$ позначаємо операцію згортки узагальненої функції з основною функцією ([15], с. 111)

$$(g \hat{*} \varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi)),\ \ g \in D'(\mathbb{R}),\ \ \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Функціонал $f * g \in D'(\mathbb{R})$, який діє за правилом $(f*g,\varphi) = (f, g\hat{*}\varphi)$, $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$, називається згорткою узагальнених функцій f та g ([15], с. 111). Зауважимо, що $f(x)\hat{*}\varphi(x) = f(-x) * \varphi(x)$ ([2], с. 80), а при існуванні $f * g$ правильна рівність $(f*g)\hat{*}\varphi = f\hat{*}(g\hat{*}\varphi)$.

Через $\times$ позначаємо прямий добуток узагальнених функцій $f, g \in D'(\mathbb{R})$ ([2, с. 54]) $(f(x) \times g(t), \varphi(x,t)) = (f(x), (g(t), \varphi(x,t)))$, $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^2)$.

Через $D'_+(\mathbb{R})$ позначають простір тих розподілів із $D'(\mathbb{R})$, які дорівнюють нулю при $t < 0$ [2, ст. 87]. Використовуємо функцію $f_\lambda \in D'_+(\mathbb{R})$, яку визначають [2, с. 87] так:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \text{ та } f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \le 0,$$

де $\theta(t)$ — функція Хевісайда, $\Gamma(\lambda)$– гамма-функція. Правильні співвідношення

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}\ \ ([2, \text{с. } 87]), \quad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}\ \ ([1, \text{с. } 145]).$$

Оператор згортки $(f_{-\lambda} *)$ в алгебрі $D'_+(\mathbb{R})$ при $\lambda > 0$ називають оператором дробового диференціювання Рімана-Ліувілля, а оператор $(f_{-\lambda}\hat{*})$ — оператором дробового диференціювання Вейля ([1, с. 133]).

Нехай $\alpha \in (0;1)$. Для $v \in D(\bar{Q}_T)$ визначено

$$f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) = f'_{1-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) = -f_{1-\alpha}(t)\hat{*}v_t(x,t)$$
$$= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_t^T \frac{v_\eta(x,\eta)}{(\eta-t)^\alpha}d\eta = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_t^T \frac{v(x,\eta)}{(\eta-t)^\alpha}d\eta, \quad (x,t)\in Q_T.$$

У [16] введено регуляризовану похідну $D_t^\alpha v$ функції v порядку $\alpha \in (0;1)$

$$D_t^\alpha v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - f_{1-\alpha}(t)v(x,0),\ (x,t)\in Q_T.$$

Зауважимо, що за умови існування неперервної $v_t(x,t)$, $(x,t)\in Q_T$, маємо

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{v_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - f_{1-\alpha}(t)v(x,0), \quad (x,t)\in Q_T \text{ [1, с. 135]}.$$

Нехай $\varepsilon_0 \in (0,T]$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$, $Q_{T,\varepsilon} = \{(x,t)\in Q_T : \varepsilon < t \le T\}$. Позначаємо через $C^{2,\alpha}(Q_T)$ клас функцій $v(x,t)$, $(x,t)\in Q_T$, неперервних, обмежених, двічі неперервно диференційовних за змінною x в Q_T, рівних нулю при $t > T$, для яких при кожному $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ існують неперервні в $Q_{T,\varepsilon}$ функції

$$(f_{-\alpha}(t) * v(x,t))^\varepsilon = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\varepsilon^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - f_{1-\alpha}(t-\varepsilon)v(x,\varepsilon).$$

Для $v \in D'(\bar{Q}_T)$ визначено

$$f_{-\alpha}(t) * v(x,t) = f'_{1-\alpha}(t)*v(x,t) = f_{1-\alpha}(t)*v_t(x,t) = (f_{1-\alpha}(t)*v(x,t))_t.$$

Введемо оператори

$\hat{L}_\alpha :\quad (\hat{L}_\alpha v)(x,t) \equiv f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) - v_{xx}(x,t), \quad v\in D(\bar{Q}_T),$

$L_\alpha :\ (L_\alpha v)(x,t) \equiv f_{-\alpha}(t) * v(x,t) - v_{xx}(x,t),\ (x,t)\in Q_T,\ v\in D'(\bar{Q}_T),$

$L_\alpha^{reg} :\ (L_\alpha^{reg} v)(x,t) \equiv D_t^\alpha v(x,t) - v_{xx}(x,t),\ (x,t)\in Q_T,\ v\in C^{2,\alpha}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T),$

$L_\alpha^\varepsilon :\ (L_\alpha^\varepsilon v)(x,t) \equiv (f_{-\alpha}(t) * v(x,t))^\varepsilon - v_{xx}(x,t),\ (x,t)\in Q_{T,\varepsilon},\ v\in C^{2,\alpha}(Q_T).$

Для $v \in C^{2,\alpha}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$ визначено $(f_{-\alpha}(t)*v(x,t))^0 = D_t^\alpha v(x,t)$, а, отже, для таких v маємо $L_\alpha^0 v = L_\alpha^{reg} v$.

Нехай $\rho(t)$ — нескінченно диференційовна невід'ємна на $[0;T]$ функція, додатна на $(0;T]$, яка має порядок $t^{\frac{\alpha}{2}}$ при $t\to 0$ $(\lim\limits_{t\to 0+}\frac{\rho(t)}{t^{\frac{\alpha}{2}}} = \mathrm{const})$ та $\rho_1(t)\le 1$ при $t\in[0;T]$.

Вводимо ваговий функційний простір

$$M_k(Q_T) = \{u \in L_{1,loc}(Q_T) :\ \|u\|_k = \int\limits_{Q_T}\rho^k(t)|u(x,t)|dxdt < +\infty\},\ k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}.$$

Зауважимо, що $M_0(Q_T) = L_1(Q_T)$. Використовуємо функційний простір $X_k(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in D(\bar{Q}_T) :\ \rho^{-k}(\hat{L}_\alpha\varphi)\in C(\bar{Q}_T)\}$. Вважаємо, що $\varphi_l \to 0$, $l\to\infty$ у $X_k(\bar{Q}_T)$, якщо $\varphi_l\to 0$ та $\varrho^{-k}\hat{L}_\alpha\varphi_l \to 0$, $l\to\infty$ рівномірно в $\bar{Q}_T$. З леми 1 у [13] випливає, що $X_k(\bar{Q}_T)$ непорожній.

Лема 1.1. *Для функцій $u\in C^{2,\alpha}(Q_T)\bigcap C(\bar{Q}_T)$, $v\in D(\bar{Q}_T)$ правильна формула Ґріна*

$$\int\limits_{Q_T}(L_\alpha^{reg}u)(x,t)v(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T}u(x,t)(\hat{L}_\alpha v)(x,t)dxdt - \int\limits_{Q_T}f_{1-\alpha}(t)u(x,0)v(x,t)dxdt. \quad (1)$$

Доведення. Враховуючи, що $L_\alpha^0 u = L_\alpha^{reg} u$ для $u \in C^{2,\alpha}(Q_T)\bigcap C(\bar{Q}_T)$, цю формулу одержуємо із формули (4) в [13] при $\varepsilon = 0$. $\square$

Зауваження 1.1. *Для довільних $u \in C^{2,\alpha}(Q_T)\bigcap C(\bar{Q}_T)$, $v \in D(\bar{Q}_T)$ маємо*

$$\int\limits_{Q_T} f_{1-\alpha}(t)u(x,0)v(x,t)dxdt = (u(x,0)\times f_{1-\alpha}(t), v(x,t)) = (u(x,0),(f_{1-\alpha}(t),v(x,t))).$$

Оскільки

$$(f_{1-\alpha}(t),v(x,t)) = \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(\tau)v(x,\tau)d\tau = (f_{1-\alpha}(\tau), v(x,\tau+t))\,|_{t=0} = [f_{1-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t)]|_{t=0},$$

то матимемо

$$\int\limits_{Q_T} f_{1-\alpha}(t)u(x,0)v(x,t)dxdt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t)]|_{t=0}dx,$$

а при $u_0 \in D'(\mathbb{R})$ та $v \in D(\bar{Q}_T)$

$$(u_0(x)\times f_{1-\alpha}(t), v(x,t)) = (u_0(x),[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t)]|_{t=0}). \tag{2}$$

2 Формулювання задачі Коші

Означення 2.1. *Кажуть, що узагальнена функція $f \in D'(\mathbb{R})$ має порядок сингулярності $s(f) \le s_0$ ([15, с. 46]), якщо $(f,\varphi) = \sum\limits_{i=0}^{s_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{(i)}(x)f_i(x)dx$, $\forall\varphi \in D(\mathbb{R})$, де $f_i \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, $i=\overline{0,s_0}$.*

Припущення (S): $u_0 \in D'(\mathbb{R})$, $s(u_0) \le s$, $k \ge \frac{s}{2}-1$, функція $g(x,t,z)$ $((x,t)\in Q_T,\ z\in\mathbb{R})$ неперервна.

За припущення (S) розглянемо задачу Коші (задачу К)

$$(L_\alpha u)(x,t) = g(x,t,u(x,t)),\quad (x,t)\in Q_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Формулювання 1 задачі К: знайти таку функцію $u \in M_k(Q_T)$, що задовольняє тотожність

$$\int\limits_{Q_T} u(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)dxdt+ \tag{3}$$

$$+(u_0(x)\times f_{1-\alpha}(t),\psi(x,t))\quad \forall\psi\in X_k(\bar{Q}_T).$$

Зрозуміло, що для розв'язку u задачі виконується умова

$$\left|\int\limits_{Q_T} g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)dxdt\right| < +\infty\quad \forall\psi\in X_k(\bar{Q}_T). \tag{4}$$

Формулювання 2 задачі К: знайти функцію $u \in M_k(Q_T)\bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$, що є границею (в $M_k(Q_T)$) послідовності розв'язків $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(Q_T)$ задач

$$(L_\alpha^\varepsilon u)(x,t) = g(x,t,u(x,t)),\quad (x,t)\in Q_{T,\varepsilon}, \tag{5}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi(x)dx = (u_0,\varphi), \quad \forall\varphi\in D(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Зауваження 2.1. *З доведення теореми 1 із [13] випливає можливість виконання умови (6) із деякою $u_0\in D'(\mathbb{R})$, порядку сингулярності $s(u_0)\le 2k+2$, якщо для границі (в $M_k(Q_T)$) послідовності $u^\varepsilon\in C^{2,\alpha}(Q_T)$ розв'язків рівнянь (5) виконується умова*

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))\psi(x,t)dxdt \to \int\limits_{Q_T} g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)dxdt,\ \varepsilon\to 0, \quad \forall\psi\in X_k(\bar Q_T). \tag{7}$$

Ясно, що $g(\cdot,u(\cdot))\in C(Q_T\times\mathbb{R})$ при $u\in C^{2,\alpha}(Q_T)$.

3 Порівняння формулювань задачі Коші

Теорема 1. *Розв'язок $u\in M_k(Q_T)\bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$ задачі К у формулюванні 1 є розв'язком цієї задачі у формулюванні 2. Розв'язок $u\in M_k(Q_T)\bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$ задачі К у формулюванні 2, для якого виконується умова (4), є розв'язком її у формулюванні 1.*

Доведення. Нехай функція $u\in M_k(Q_T)\bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$ задовольняє умову (4) та є розв'язком задачі К у формулюванні 2, а, отже, є границею (в $M_k(Q_T)$) послідовності розв'язків $u^\varepsilon\in C^{2,\alpha}(Q_T)$ задач (5), (6). Для довільної $\psi\in X_k(\bar Q_T)$ визначимо $\psi_\varepsilon(x,t)=\psi(x,t-\varepsilon)$, $t\in[\varepsilon,T+\varepsilon]$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0/2]$. Тоді $\psi_\varepsilon(x,t)\to\psi(x,t)$ та $\varrho^{-k}(t-\varepsilon)(\hat L_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t)\to\varrho^{-k}(t)(\hat L_\alpha\psi)(x,t)$, $\varepsilon\to 0$ рівномірно в $\bar Q_T$ ($\psi_\varepsilon\to\psi$ в $X_k(\bar Q_T)$). В області $Q_{T,\varepsilon}$ запишемо формулу Ґріна (5) із [13] для u^ε та ψ_ε:

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)(\hat L_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t)dxdt - \int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))\psi_\varepsilon(x,t)dxdt \tag{8}$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\Big|_{t=\varepsilon}dx.$$

З умов теореми та з припущення (4) випливає існування границі при $\varepsilon\to 0$ кожного доданку у лівій частині рівності (8).

З умови (6) та леми з [15, с. 70] одержуємо, що для довільної $\varphi_\varepsilon\in D(\mathbb{R})$ такої, що $\varphi_\varepsilon\to\varphi$ при $\varepsilon\to 0$ у просторі $D(\mathbb{R})$ ([15, с. 13]), також існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi(x)dx.$$

Доведемо, що для довільної $\psi\in X_k(\bar Q_T)$ виконується

$$\varphi_\varepsilon(x)=\int\limits_{\varepsilon}^{T} f_{1-\alpha}(\tau-\varepsilon)\psi(x,\tau)d\tau \to \varphi(x)=\int\limits_{0}^{T} f_{1-\alpha}(\tau)\psi(x,\tau)d\tau = \Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi(x,t)\Big]\Big|_{t=0}$$

при $\varepsilon \to 0$ у просторі $D(\mathbb{R})$ ([15, с. 13]).

За властивістю операції $\hat{*}$ існує такий скінченний відрізок $[a;b]$, що $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon \subset [a;b]$ для всіх $\varepsilon \in [0;\varepsilon_0]$ та неперервні $\varphi_\varepsilon^{(q)}(x) = \int\limits_\varepsilon^T f_{1-\alpha}(\tau-\varepsilon)(\frac{\partial}{\partial x})^q \psi(x,\tau)d\tau$, $q = 0, 1, \ldots$. Звідси $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty([a,b])$ для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, крім того для всіх $q = 0, 1, \ldots$ послідовності $\varphi_\varepsilon^{(q)}(x)$ рівномірно щодо $x \in [a,b]$ збігаються

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon^{(q)}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\varepsilon^T f_{1-\alpha}(\tau-\varepsilon)(\frac{\partial}{\partial x})^q \psi(x,\tau)d\tau = \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(\tau)(\frac{\partial}{\partial x})^q \psi(x,\tau)d\tau.$$

Таким чином, $\varphi(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(x)$ в $D(\mathbb{R})$. За лемою з [15, с. 70] також існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\ |_{t=\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^T f_{1-\alpha}(t-\varepsilon)\psi(x,t)dt = \varphi(x).$$

Отже, з умови (6) випливає існування границі

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)(\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(x))dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi(x)dx$$

$$= (u_0, \varphi) = (u_0, \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(\tau)\psi(\cdot,\tau)d\tau) = (u_0(x) \times f_{1-\alpha}(\tau), \psi(x,\tau)).$$

Тому після переходу в (8) до границі при $\varepsilon \to 0$ отримаємо тотожність (3). Отже, розв'язок задачі К у формулюванні 2 є розв'язком цієї задачі у формулюванні 1.

Тепер нехай $u \in M_k(Q_T)\bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$ та u є розв'язком задачі К у формулюванні 1, а, отже, задовольняє тотожність (3). Звідси для $\psi \in D(Q_T)$ (очевидно, що $D(Q_T) \subset X_k(\bar{Q}_T)$ для всіх $k \geq 0$) маємо

$$\int\limits_{Q_T} u(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)dxdt,$$

а з формули Ґріна (4) в [13] для $v = u \in C^{2,\alpha}(Q_T)$, $\psi \in D(Q_{T,\varepsilon})$ $(\subset X_k(\bar{Q}_{T,\varepsilon}))$

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} (L_\alpha^\varepsilon u)(x,t)\psi(x,t)dxdt \quad \forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_0).$$

Отже,

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} (L_\alpha^\varepsilon u)(x,t)\psi(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)dxdt \ \ \forall\ \psi \in D(Q_{T,\varepsilon}).$$

За лемою Дюбуа-Реймона [2, ст. 28] звідси одержуємо, що $(L_\alpha^\varepsilon u)(x,t) = g(x,t,u(x,t))$ майже всюди в $Q_{T,\varepsilon}$, а з того, що $u \in C^{2,\alpha}(Q_T)$ та з неперервності функції g одержуємо

$$(L_\alpha^\varepsilon u)(x,t) = g(x,t,u(x,t)) \text{ для всіх } (x,t) \in Q_{T,\varepsilon}.$$

Ми показали, що розв'язок $u \in M_k(Q_T) \bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$ задачі К у формулюванні 1 задовольняє кожне з рівнянь (5) в $Q_{T,\varepsilon}$. Оскільки функція $u \in M_k(Q_T)$, $g(x,t,u(x,t))$ неперервна в Q_T та виконується (4), то існує границя при $\varepsilon \to 0$ лівої частини рівності (8), яка дорівнює $\int\limits_{Q_T} [u(x,t)(\hat{L}_\alpha \psi)(x,t) - g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)]dxdt$. Тоді існує границя $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\varepsilon)\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\Big|_{t=\varepsilon} dx$.

Враховуючи (3), для довільних $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$, $\psi_\varepsilon(x,t) = \psi(x,t-\varepsilon)$ та розв'язку $u \in M_k(Q_T) \bigcap C^{2,\alpha}(Q_T)$ задачі К у формулюванні 1 матимемо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\varepsilon)\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big] \,|_{t=\varepsilon}\, dx = (u_0(x) \times f_{1-\alpha}(t), \psi(x,t)),$$

а, згідно з формулою (2),

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\varepsilon)\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi(x,t)\Big]|_{t=\varepsilon} dx = (u_0(x), (f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi(x,t))|_{t=0}). \tag{9}$$

За лемою 1 [13] для довільної функції $\varphi \in D(\mathbb{R})$ існує така $\psi_2 \in X_k(\bar{Q}_T)$, що $(f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_2(x,t))|_{t=0} = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, (а отже, $(u_0(x), (f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi(x,t))|_{t=0}) = (u_0, \varphi)$), відповідно $\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_{2\varepsilon}(x,t-\varepsilon)\Big]\Big|_{t=\varepsilon} = \Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_{2\varepsilon}(x,t)\Big]\Big|_{t=0} = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, а, отже,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\varepsilon)(f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_{2\varepsilon}(x,t))|_{t=\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\varepsilon)\varphi(x)dx.$$

Тому з (9) випливає, що $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\varepsilon)\varphi(x)dx = (u_0, \varphi)$, $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$, а, отже, розв'язок u задачі К у формулюванні 1 задовольняє початкову умову (6). □

4 Існування розв'язку узагальненої задачі Коші для лінійного однорідного рівняння з дробовою похідною за часом

У [7] доведено існування та єдиність розв'язку $u \in C^{2,\alpha}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ задачі Коші

$$(L_\alpha^{reg} u)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{10}$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

з такою неперервною g_1, що $|g_1(x)| \le C\exp\{h|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\}$, $x \in \mathbb{R}$, де $0 \le h < \mu_0 T^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}$, $\mu_0 = (2-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{2}} 2^{-\frac{2}{2-\alpha}}$, і одержано його зображення

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-y,t)g_1(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

за допомогою ядра $G_1(x,t)$. Знайдені оцінки ядра $G_1(x,t)$ та його похідних:

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^j G_1(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{(j+1)\alpha}{2}} \exp\Big\{-\mu_j |x|^{\frac{2}{2-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\Big\} \text{ при } t^{-\alpha}|x|^2 \ge 1, \tag{13}$$

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^j G_1(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{(j+1)\alpha}{2}} \text{ при } t^{-\alpha}|x|^2 \le 1, \;\; j=0,1,2..., \tag{14}$$

$$\left|D_t^{\beta} G_1(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{\alpha}{2}-\beta} \exp\Big\{-\mu_\beta |x|^{\frac{2}{2-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\Big\} \text{ при } t^{-\alpha}|x|^2 \ge 1,$$

$$\left|D_t^{\beta} G_1(x,t)\right| \le Ct^{-\frac{\alpha}{2}-\beta} \text{ при } t^{-\alpha}|x|^2 \le 1, \;\; 0<\beta<1,$$

де за μ_j і μ_β можна взяти довільні додатні числа, менші за μ_0. Різні додатні сталі ми позначили однією буквою C.

Припущення (L): $u_0 \in (C^\infty(\mathbb{R}))'$, $s(u_0) \le s$, $k > s - \frac{2}{\alpha}$.

За припущення (L) розглянемо задачу Коші

$$(L_\alpha u)(x,t) = 0, (x,t) \in Q_T, \tag{15}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Теорема 2. *За припущення (L) існує єдиний розв'язок $u \in C^{2,\alpha}(Q_T) \cap M_k(Q_T)$ задачі Коші (15), (16), визначений формулою*

$$u(x,t) = (u_0(y), G_1(x-y,t)), \quad (x,t) \in Q_T. \tag{17}$$

Доведення. В [7] показано, що функція $G_1(x,t)$ нескінченно диференційовна при $(x,t) \ne (0,0)$, а, отже, $G_1(x-y,t)$ — нескінченно диференційовна при $(x,t) \in Q_T$ і права частина (17) має сенс. З вигляду u та властивостей G_1 випливає, що функція (17) належить класу $C^{2,\alpha}(Q_T)$. Покажемо, що вона належить простору $M_k(Q_T)$. Для цього знайдемо оцінку $\int\limits_{Q_T} \varrho^k(t)|u(x,t)|dxdt$. З означення порядку сингулярності узагальненої функції маємо $(u_0(y), G_1(x-y,t)) = \sum\limits_{i=0}^{s_0} \int\limits_B (\frac{\partial}{\partial y})^i G_1(x-y,t) f_i(y)dy$, $(x,t) \in Q_T$, де $B = \operatorname{supp} u_0$, $f_i \in L_1(B)$. Враховуючи оцінки (13), (14), як у [8, с. 144], за умови на число k одержуємо обмеженість усіх інтегралів $\int\limits_{Q_T} \varrho^k(t)|(\frac{\partial}{\partial y})^i G_1(x-y,t)|dxdt$, $i = \overline{0,s}$, певною додатною сталою $\widehat{C}_k$. Тоді

$$\int\limits_{Q_T} \varrho^k(t)|u(x,t)|dxdt \le \sum_{i=0}^{s} \int\limits_{Q_T} \varrho^k(t)\Big(\int\limits_B (|\frac{\partial}{\partial y})^i G_1(x-y,t)| \cdot |f_i(y)|dy\Big)dxdt$$

$$= \sum_{i=0}^{s} \int\limits_B \Big(\int\limits_{Q_T} \varrho^k(t)|(\frac{\partial}{\partial y})^i G_1(x-y,t)|dxdt\Big)|f_i(y)|dy \le \widehat{C}_k \cdot \sum_{i=0}^{s} \int\limits_B |f_i(y)|dy = C_k.$$

Покажемо, що функція (17) задовольняє тотожність (3) для кожної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$. З визначення функції $G_1(x,t)$ як ядра Пуассона задачі Коші випливає, що

$$L_\alpha^{reg} G_1(x,t) = 0 \text{ при } (x,t) \in Q_T, \quad G_1(x,0) = \delta(x).$$

Підставляючи у формулу (1) функцію $g_1(x)$ замість $u(x,0)$ та зображення (12) розв'язку класичної задачі Коші (10), (11), для кожної $v = \psi \in X_k(\bar{Q}_T)$ матимемо

$$\int\limits_{Q_T} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-y,t)g_1(y)dy\Big)(\hat{L}_\alpha \psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} f_{1-\alpha}(t) g_1(x)\psi(x,t)dxdt,$$

тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int\limits_{Q_T} G_1(x-y,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt\Big)g_1(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int\limits_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi(y,t)dt\Big)g_1(y)dy.$$

Враховуючи довільність функції $g_1(y)$, звідси одержуємо, що для кожної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$

$$\int\limits_{Q_T} G_1(x-y,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi(y,t)dt, \quad (y,t)\in\bar{Q}_T,$$

а тоді, враховуючи вигляд функції (17), її властивості, аналог теореми Фубіні ([2, с. 59], формула (3.2)) та формулу (2), для довільної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$ матимемо

$$\int\limits_{Q_T} u\cdot\hat{L}_\alpha\psi dxdt = \int\limits_{Q_T}\Big(u_0(y), G_1(x-y,t)\Big)\hat{L}_\alpha\psi(x,t)dxdt = \Big(u_0(y), \int\limits_{Q_T} G_1(x-y,t)\hat{L}_\alpha\psi(x,t)dxdt\Big)$$

$$= \Big(u_0(y), \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi(y,t)dt\Big) = \Big(u_0(y)\times f_{1-\alpha}(t), \psi(y,t)\Big).$$

Ми показали, що функція (17) є розв'язком задачі (15), (16) у формулюванні 1. За теоремою 1 вона буде розв'язком цієї задачі й у формулюванні 2.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (15), (16). Якщо u_1, u_2 — два її розв'язки, $u = u_1 - u_2$, то $u \in M_k(Q_T)$, а згідно з формулюванням 2, враховуючи фінітність заданої узагальненої функції u_0,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(y,\varepsilon)\varphi(y)dy = 0, \quad \forall\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

За лемою з [15, с. 70] для довільної $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ такої, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon = \varphi$ в $C^\infty(\mathbb{R})$, також існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(y,\varepsilon)\varphi_\varepsilon(y)dy = 0, \quad \forall\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}). \tag{18}$$

Враховуючи, що $(L_\alpha^\varepsilon v)(x,t) = (L_\alpha^{reg} v(x,t+\varepsilon))(x,t-\varepsilon)$, $v \in C^{2,\alpha}(\bar{Q}_T)$, із формули (12) одержуємо зображення розв'язків u^ε:

$$u^\varepsilon(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-y,t-\varepsilon)u^\varepsilon(y,\varepsilon)dy, \quad (x,t)\in Q_{T,\varepsilon}. \tag{19}$$

Для кожної фіксованої точки $(x,t) \in Q_{T,\varepsilon}$ функція $G_1(x-y,t-\varepsilon)$ як функція y належить $C^\infty(\mathbb{R})$. Тоді з умови (18) (при $G_1(x-y,t-\varepsilon)$ замість $\varphi_\varepsilon(y)$) випливає існування

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(y,\varepsilon)G_1(x-y,t-\varepsilon)dy = 0, \quad (x,t)\in Q_T. \tag{20}$$

Тепер із формули (19) з врахуванням умови (20) одержуємо, що $u^\varepsilon(x,t) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ у кожній точці $(x,t) \in Q_T$, а тоді $u^\varepsilon(x,t) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ в $M_k(Q_T)$. Згідно з формулюванням 2 задачі, $u(x,t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x,t)$ в $M_k(Q_T)$. В результаті одержуємо $u(x,t) = 0$, $(x,t) \in Q_T$.

Достатні умови розв'язності задачі К (для півлінійного рівняння) за припущення (S) знаходимо, використовуючи методику [8], [11], властивості ядра Пуассона $G_1(x,t)$ із [7] та властивості функції $G_0(x,t) = f_{\alpha-1}(t) * G_1(x,t)$. □

Одержані результати поширюються на випадок рівняння

$$f_{-\alpha}(t) * u = A(x,D)u + g(x,t,u), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0;T],$$

де $A(x,D)$ — лінійний еліптичний диференціальний вираз другого порядку з нескінченно диференційовними коефіцієнтами в $\mathbb{R}^n$.

Література

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций (Серия: СМБ). — М.: Мир, 1970. — 328 с.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
3. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *О начальных данных гладких решений некоторых классов параболических уравнений* // Успехи мат. наук. — 1979. — Т.34, №4. — С. 164.
4. Городецкий В.В., Дринь Я.М. Параболические псевдодифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций. — Львов, 1991.— 57 с. (Препр. АН Украины. Ин-т прикл. пр. мех. и мат.; №4–91.)
5. Грушин В.В. *О поведении решений дифференциальных уравнений вблизи границы* // Докл. АН СССР. — 1964. — Т.158. — С. 264–267.
6. Гупало А.С., Лопушанская Г.П. Об обобщенных граничных значениях решения однородного параболического уравнения второго порядка. Методы исследования дифференциальных и интергральных операторов. — К.: Наук. думка, 1989. — С.54–59.
7. Кочубей А.Н. *Диффузия дробного порядка* // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т.26, №4. — С. 660–670.
8. Лопушанська Г.П. Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D'. — Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2002. — 287 с.
9. Лопушанська Г.П. *Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних* // Укр. мат. журн. — 1999. — Т.51, №1. — С. 48–59.
10. Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю. *Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь* // Нелінійні граничні задачі. — 2007. — Т.17. — С. 50–73.
11. Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю. *Узагальнені крайові значення розв'язків рівняння* $u_t = \Delta u + F_0(x,t,u)$ // Математичні Студії. — 2004. — Т.22, №1. — С. 45–56.
12. Лопушанский А.О. *Абстрактная параболическая задача Коши в комплексных интерполяционных шкалах* // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т.46, №12. — С. 1799–1803.
13. Лопушанський А.О., Лопушанська Г.П., Пасічник О.В. *Сліди розв'язків півлінійних рівнянь з дробовою похідною за часом* // Карпат. матем. публ. — 2011. — Т.3, №1. — С. 85–93.
14. Чмир О.Ю. *Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2003. — Вип.62. — С. 134–143.

15. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальний курс — М.: Наука, 1965. — 328 с.
16. Caputo M. *Liner model of dissipation whose Q is almost frequency independent*, II. Geophys. J. R. Astr. Soc., **13** (1967), 520–539.
17. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.

[1] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
[2] Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mail: *lhp@ukr.net, olena.pasichnyk@gmail.com*

Надійшло 05.12.2011

Lopushansky A.O., Lopushanska H.P., Pasichnyk O.V. *Two definitions of the generalized Cauchy problem for semi-linear diffusion equation with fractional derivative with respect to time*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 1 (2012), 72–82.

Different equivalent definitions of the Cauchy problem for semi-linear diffusion equation with fractional derivative with respect to time and with the generalized function in the initial condition are offered. The existence and uniqueness theorem and the representation of the solution of such problem for linear homogeneous diffusion equation with fractional derivative with respect to time are obtained.

Лопушанский А.О., Лопушанская Г.П., Пасичник Е.В. *Две постановки обобщенной задачи Коши для полулинейного уравнения диффузии с дробной производной по времени* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №1. — С. 72–82.

Предложено две эквивалентные постановки задачи Коши для полулинейного уравнения дробного порядка $\alpha \in (0;1)$ по времени с обобщенной функцией в начальном условии. Доказана теорема существования и единственности, получено представление решения такой задачи для линейного однородного уравнения с дробной производной по времени.