Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.524

Антонова Т.М.

ПРО ПРОСТІ КРУГОВІ МНОЖИНИ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Антонова Т.М. *Про прості кругові множини абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 165–174.

Досліджено значення радіусів кругів з центром у початку координат, які є простими множинами абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду.

Об'єктом дослідження є гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{1}$$

де $b_0, a_{i(k)}$ — комплексні сталі, $i_0 = N$ — кількість гілок розгалужень, $i(k)$ — мультиіндекс, $i(k) \in I$,

$$I = \{i(k) : i(k) = i_1 i_2 ... i_k; 1 \le i_k \le i_{k-1}; k = 1, 2, ...\}.$$

Підхідними дробами n-го порядку (n-ми апроксимантами) ГЛД (1) називаються вирази

$$f_0 = b_0, \ f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \ n = 1, 2, ...$$

ГЛД (1) називається збіжним, якщо існує скінченна границя $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Число f вважається значенням збіжного ГЛД (1). ГЛД (1) збігається абсолютно, якщо збігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k - f_{k-1}|$.

Послідовність $\{E_{i(k)}\}$ непорожніх множин $E_{i(k)} \subseteq \mathbb{C}$, $i(k) \in I$, називається послідовністю множин збіжності (абсолютної збіжності), якщо за умови

$$a_{i(k)} \in E_{i(k)}, \quad i(k) \in I,$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 40A15.

Ключові слова і фрази: гіллястий ланцюговий дріб, підхідний дріб, множина абсолютної збіжності.

ГЛД (1) збігається (збігається абсолютно). Якщо $E_{i(k)} = E$ для всіх $i(k) \in I$, то E називається простою множиною збіжності (абсолютної збіжності) ГЛД (1).

Напевно, найвідомішою простою множиною збіжності звичайних ланцюгових (неперервних) дробів є круг Ворпіцького [4] — круг з центром у початку координат і радіусом $\frac{1}{4}$. Встановлені значення радіусів простих кругових множин збіжності для деяких багатовимірних узагальнень неперервних дробів — ГЛД загального вигляду [3], двовимірних неперервних дробів [5], інтегральних ланцюгових дробів [6]. У даній роботі розглядається питання про радіуси простих кругових (з центром у початку координат) множин абсолютної збіжності ГЛД вигляду (1).

Твердження 1. *[1] ГЛД (1) збігається абсолютно, якщо існують такі додатні сталі $t_{i(k)}$, $i(k) \in I$, що для всіх можливих мультиіндексів виконується умова*

$$\left|a_{i(k)}\right| \le t_{i(k)} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} t_{i(k+1)}\right), \quad i(k) \in I.$$

Для доведення твердження 1 використовується метод мажорант і оцінка

$$\left|Q_{i(k)}^{(n)}\right| \ge \overline{Q}_{i(k)}^{(n)} \ge 1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} t_{i(k+1)}, \ i(k) \in I, \ n = 1, 2, \dots, \ 1 \le k \le n, \tag{2}$$

де $Q_{i(k)}^{(n)}$, $\overline{Q}_{i(k)}^{(n)}$ — скінченні ГЛД вигляду

$$Q_{i(k)}^{(k)} = \overline{Q}_{i(k)}^{(k)} = 1, \ Q_{i(k)}^{(n)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{p=k+1}^{n} \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} \frac{a_{i(p)}}{1}, \ \overline{Q}_{i(k)}^{(n)} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{p=k+1}^{n} \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} \frac{-\left|a_{i(p)}\right|}{1},$$

$$k = 1,\ 2,\ \dots,\ n > k,$$

які називаються залишками ГЛД (1) і ГЛД

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-\left|a_{i(k)}\right|}{1}$$

відповідно.

З твердження 1 випливає, що послідовність множин

$$E_{i(k)} = \left\{ z : z \in \mathbb{C}, \ |z| \le t_{i(k)} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} t_{i(k+1)}\right) \right\}, \ i(k) \in I,$$

де $t_{i(k)}$ — деякі додатні числа, такі, що $\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} t_{i(k)} < 1$, $i(k) \in I$, є послідовністю множин абсолютної збіжності ГЛД (1), а радіус круга з центром у початку координат, що є простою множиною абсолютної збіжності ГЛД (1) з N гілками розгалужень, можна визначити з умови

$$R_N = \inf_{i(k)\in I} t_{i(k)} \left(1 - \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} t_{i(k+1)}\right).$$

Якщо $t_{i(k)} = \dfrac{1}{2i_{k-1}}$, $i(k) \in I$, твердження 1 перетворюється на аналог ознаки Ворпіцького для ГЛД (1) [2]. У цьому випадку шуканий радіус дорівнює

$$R_N = \min_{1\le i_{k-1}\le N} \frac{1}{2i_{k-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4N},$$

як і для ГЛД загального вигляду з N гілками розгалужень, для яких константа $\dfrac{1}{4N}$ є непокращуваною [3]. Якщо $t_{i(k)} = t_{i_k}$, $i(k) \in I$, то радіус круга з центром у початку координат, який є простою множиною абсолютної збіжності ГЛД (1), можна визначити з умови

$$R_N = \min_{1\le k\le N} t_k \left(1 - \sum_{p=1}^{k} t_p\right). \tag{3}$$

Твердження 2. *Радіус простої кругової з центром у початку координат множини абсолютної збіжності ГЛД (1) — це N-й член послідовності $\{R_k\}$, де*

$$0 < R_1 \le \frac{1}{4},\ R_{k+1} = \frac{R_k}{(R_k+1)^2},\ k = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Доведення. Нехай $\{r_k\}$ — послідовність таких додатних чисел, що

$$0 < r_1 < 1,\ r_{k+1} = \frac{r_k\,(1-r_k)}{r_k\,(1-r_k)+1},\ k = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

і

$$t_1 = r_N,\ t_p = r_{N-p+1} \prod_{l=1}^{p-1} (1 - r_{N-l+1}),\ p = 2, \ldots, N. \tag{6}$$

Зауважимо, що

$$1 - \sum_{p=1}^{k} t_p = \prod_{p=1}^{k} (1 - r_{N-p+1}),\ k = 1, \ldots, N. \tag{7}$$

Дійсно,

$$1 - t_1 = 1 - r_N,\ 1 - t_1 - t_2 = 1 - r_N - r_{N-1}\,(1-r_N) = (1-r_{N-1})\,(1-r_N).$$

Припускаючи, що рівність (7) справджується для деякого значення k, $1 \le k < N$, отримаємо

$$1 - \sum_{p=1}^{k+1} t_p = 1 - \sum_{p=1}^{k} t_p - t_{k+1} = \prod_{p=1}^{k} (1 - r_{N-p+1}) - r_{N-k} \prod_{p=1}^{k} (1 - r_{N-p+1}) = \prod_{p=1}^{k+1} (1 - r_{N-p+1}),$$

тобто рівність (7) справджується для значення $k+1$, отже, справджується і для всіх значень $k,\ 1 \leq k \leq N$.

Покажемо, що

$$t_k\left(1-\sum_{p=1}^{k} t_p\right) = r_N\left(1-r_N\right),\ k=1,\ldots,N. \tag{8}$$

Із співвідношень (5) випливає, що

$$0 < r_{k+1} < 1,\ r_k\left(1-r_k\right) = \frac{r_{k+1}}{1-r_{k+1}},\ k=1,2,\ldots. \tag{9}$$

Перевіримо правильність рівності (9) для $k=1,\ 2:$

$$t_1\left(1-t_1\right) = r_N\left(1-r_N\right),$$

$$t_2\left(1-t_1-t_2\right) = r_{N-1}\left(1-r_N\right)\cdot\left(1-r_{N-1}\right)\left(1-r_N\right) = r_N\left(1-r_N\right).$$

Нехай рівність (8) справджується для деякого значення $k,\ 1 \leq k < N$. Тоді з (6), (8) і (9) випливає, що

$$t_{k+1}\left(1-\sum_{p=1}^{k+1} t_p\right) = r_{N-k}\prod_{l=1}^{k}\left(1-r_{N-l+1}\right)\cdot\prod_{l=1}^{k+1}\left(1-r_{N-l+1}\right)$$

$$= r_{N-k}\left(1-r_{N-k}\right)\prod_{l=1}^{k}\left(1-r_{N-l+1}\right)^2 = \frac{r_{N-k+1}}{1-r_{N-k+1}}\left(1-r_{N-k+1}\right)^2\prod_{l=1}^{k-1}\left(1-r_{N-l+1}\right)^2$$

$$= r_{N-k+1}\prod_{l=1}^{k-1}\left(1-r_{N-l+1}\right)\cdot\prod_{l=1}^{k}\left(1-r_{N-l+1}\right) = t_k\left(1-\sum_{p=1}^{k} t_p\right) = r_N\left(1-r_N\right).$$

Таким чином, рівність (8) справджується для всіх значень $k,\ 1 \leq k \leq N$.

Нехай елементи послідовності $\{R_k\}$ визначаються у такий спосіб:

$$R_k = r_k\left(1-r_k\right),\ k=1{,}2{,}\ldots\ ,$$

де послідовність $\{r_k\}$ означена за допомогою співвідношень (5). Тоді

$$0 < R_1 = r_1\left(1-r_1\right) \leq \frac{1}{4},$$

$$R_{k+1} = r_{k+1}\left(1-r_{k+1}\right) = \frac{r_k\left(1-r_k\right)}{r_k\left(1-r_k\right)+1}\cdot\frac{1}{r_k\left(1-r_k\right)+1} = \frac{R_k}{\left(R_k+1\right)^2},\ k=1{,}2{,}\ldots\ .$$

Враховуючи рівності (3), (8), доходимо висновку про правильність твердження 2. □

Твердження 3. *Для елементів послідовності $\{R_m\}$, які визначаються співвідношеннями (4), справджується оцінка*

$$\frac{1}{2(m-1)+\dfrac{1}{R_1}+\displaystyle\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{2k}} \leq R_m \leq \frac{1}{2(m+1)+R_1},\ m=2,3,\ldots. \tag{10}$$

Доведення. Використовуємо метод математичної індукції. Покажемо спочатку, що

$$\frac{1}{R_m} \geq R_1 + 2(m+1),\ m = 2, 3,\ , \dots . \tag{11}$$

Перевіримо правильність нерівності (11) для $m = 2$. Із співвідношень (4) випливає, що

$$\frac{1}{R_2} = R_1 + \frac{1}{R_1} + 2 \geq R_1 + 4 + 2 = R_1 + 2 \cdot 3,$$

тобто для $m = 2$ нерівність (11) справджується. Припускаючи, що нерівність (11) справджується для деякого $m = k$ і використовуючи (4), одержимо

$$\frac{1}{R_{k+1}} = R_k + \frac{1}{R_k} + 2 \geq R_k + R_1 + 2(k+1) + 2 > R_1 + 2((k+1)+1),$$

а це означає, що нерівність (11) справджується для всіх $m = 2, 3, \dots$.

З іншого боку,

$$\frac{1}{R_2} = R_1 + \frac{1}{R_1} + 2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{R_1} + 2 = \frac{1}{R_1} + 2(2-1) + \frac{1}{2 \cdot 2},$$

тобто для $m = 2$ справджується нерівність

$$\frac{1}{R_m} \leq \frac{1}{R_1} + 2(m-1) + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{2k}. \tag{12}$$

Припускаючи, що нерівність (12) справджується для деякого значення $m > 2$ і враховуючи (4), (11), одержимо

$$\frac{1}{R_{m+1}} = R_m + \frac{1}{R_m} + 2 \leq R_m + \frac{1}{R_1} + 2(m-1) + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{2k} + 2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{R_1 + 2(m+1)} + \frac{1}{R_1} + 2m + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{2k} < \frac{1}{R_1} + 2((m+1)-1) + \sum_{k=2}^{m+1} \frac{1}{2k},$$

отже, нерівність (12) справджується для довільних $m = 2, 3, \dots$. З нерівностей (11), (12) випливає правильність нерівності (10). □

Зауваження. *Оскільки*

$$R_N - \frac{1}{4N} \geq \frac{1}{2(N-1) + \sum\limits_{k=2}^{N} \frac{1}{2k} + \frac{1}{R_1}} - \frac{1}{4N} > \frac{1}{\frac{9}{4}(N-1) + \frac{1}{R_1}} - \frac{1}{4N},\ N \geq 2,$$

то за умови $R_1 > \dfrac{4}{7N+9}$ *виконується нерівність* $R_N > \dfrac{1}{4N}$ *, тобто радіус круга з центром у початку координат, який є простою множиною абсолютної збіжності ГЛД вигляду(1) з* N *гілками розгалужень, може бути більшим, ніж радіус круга з центром* *у початку координат, який є простою множиною абсолютної збіжності ГЛД загального вигляду з N гілками розгалужень.*

Значення $R_k,\ k = 2, 3, \ldots$, які визначаються співвідношеннями (4), залежать від R_1, $R_k < \dfrac{1}{4}$, а функція $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ монотонно зростає для $0 < x < 1$. Тому

$$R_k\left(R_1\right) \le R_k\left(\frac{1}{4}\right) = R_k^*,\ k = 2, 3, \ldots\ ,$$

де $\{R_k^*\}$ – послідовність додатних чисел, що визначаються у такий спосіб:

$$R_1^* = \frac{1}{4},\ R_{k+1}^* = \frac{R_k^*}{\left(R_k^*+1\right)^2},\ k = 1, 2, \ldots\ . \tag{13}$$

Згідно з твердженням 3 правильною є така оцінка:

$$\frac{1}{2(N+1) + \sum\limits_{k=2}^{N} \dfrac{1}{2k}} \le R_N^* \le \frac{4}{8(N+1)+1},\ N = 2, 3, \ldots .$$

Твердження 4. *ГЛД вигляду*

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-R}{1^{i_k}},\ R > 0, \tag{14}$$

з N гілками розгалуження ($i_0 = N$) збігається тоді і лише тоді, коли

$$R \le R_N^*, \tag{15}$$

де $\{R_k^*\}$ — послідовність додатних чисел, що визначаються рівностями (13). Значення ГЛД (14) дорівнює

$$\left(1 - r_1\right)\left(1 - r_2\right) \ldots \left(1 - r_N\right),$$

де

$$r_N = \frac{1 - \sqrt{1-4R}}{2}, \tag{16}$$

$$r_k = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1 - 5r_{k+1}}{1 - r_{k+1}}}\right),\ k = N-1, N-2, \ldots,\ 1\ . \tag{17}$$

Доведення. За умов (15), (13) для ГЛД (14) виконуються умови тверджень 1 і 2. Тому, враховуючи твердження 2 і зауваження, доходимо висновку про достатність умов (15), (13) для збіжності ГЛД (14).

n-й підхідний дріб ГЛД (14), $n = 0, 1, \ \ldots$, дорівнює його деякому залишку, а саме:

$$\tilde{f}_n = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-R}{1^{i_k}} = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{p=2}^{n+1} \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} \frac{-R}{1^{i_p}} = \tilde{Q}_{i(1)}^{(n+1)},\quad i_1 = i_0\ . \tag{18}$$

Розв'язуючи рівняння (17) відносно r_{k+1}, отримаємо

$$r_{k+1} = \frac{r_k\,(1 - r_k)}{r_k\,(1 - r_k) + 1},$$

отже, за умов (16), (17) для r_1, r_2, $\ldots$, r_N виконуються співвідношення (5).

Оскільки для ГЛД (14) справджуються умови тверджень 1 і 2, то для його залишків є правильною оцінка типу (3). Враховуючи рівності (6), (7) і (18), одержимо

$$\tilde{f}_n \geq (1 - r_1)\,(1 - r_2) \ldots (1 - r_N)\,. \tag{19}$$

Доведення необхідності проводимо за індукцією по кількості розгалужень ГЛД вигляду (14). Позначимо через $f_{k,m}$ k-й підхідний дріб ГЛД вигляду (14) з m гілками розгалуження.

У випадку $m = 1$ ГЛД (14) перетворюється на звичайний неперервний дріб

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{-R}{1^k},\ R > 0,$$

який збігається тоді і лише тоді, коли $R \leq R_1^* = \dfrac{1}{4}$ [4], причому

$$\lim_{k\to\infty} f_{k,1} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4R}}{2} = 1 - r_1,$$

де $r_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4R}}{2}$.

Якщо $m \geq 2$, тоді

$$f_{k+1,m} = f_{k+1,m-1} - \frac{R}{f_{k,m}},\quad k = 0, 1,\ \ldots\ ,\ m = 2, 3,\ \ldots\ ,$$

або

$$f_{k+1,m} + \frac{R}{f_{k,m}} = f_{k+1,m-1},\quad k = 0, 1,\ \ldots\ ,\ m = 2, 3,\ \ldots\ . \tag{20}$$

Припустимо, що ГЛД (14) з $m = 2$ збігається. Тоді

$$\lim_{k\to\infty} \left(f_{k+1,2} + \frac{R}{f_{k,2}} \right) = \lim_{k\to\infty} f_{k+1,1},$$

отже, $R \leq \dfrac{1}{4}$, і можна записати, що $R = r_2\,(1 - r_2)$, де $r_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4R}}{2}$, і $\lim\limits_{k\to\infty} f_{k+1,1} = 1 - r_2$. З урахуванням припущення про збіжність ГЛД (14) з $m = 2$ доходимо висновку, що $F_2 = \lim\limits_{k\to\infty} f_{k,2} \neq 0$ при $R \leq \dfrac{1}{4}$, а F_2 є дійсним коренем рівняння

$$F_2^2 - (1 - r_2)\,F_2 + r_2\,(1 - r_2) = 0. \tag{21}$$

Дискримінант рівняння (21)

$$D = (1 - r_2)^2 - 4r_2\,(1 - r_2) = (1 - r_2)\,(1 - 5r_2)$$

буде невід'ємним за вище наведених припущень лише тоді, коли

$$r_2 \leq r_2^* = \frac{1}{5}\,,$$

а

$$r_2^*\left(1 - r_2^*\right) = \frac{4}{25} = R_2^*.$$

У випадку $D > 0$ рівняння (21) має два корені:

$$\frac{1 - r_2 - \sqrt{\left(1 - r_2\right)\left(1 - 5r_2\right)}}{2};\;\; \frac{1 - r_2 + \sqrt{\left(1 - r_2\right)\left(1 - 5r_2\right)}}{2}.$$

Нехай

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1 - 5r_2}{1 - r_2}}\right).$$

Тоді у випадку $D > 0$ менший з коренів рівняння дорівнює $\left(1 - r_2\right) r_1$, а більший – $\left(1 - r_2\right)\left(1 - r_1\right).$

Враховуючи нерівність (19), доходимо висновку, що

$$F_2 = \lim_{k\to\infty} f_{k,2} \geq \left(1 - r_2\right)\left(1 - r_1\right),$$

отже,

$$F_2 = \left(1 - r_2\right)\left(1 - r_1\right) = \frac{1 - r_2 + \sqrt{\left(1 - r_2\right)\left(1 - 5r_2\right)}}{2}.$$

Таким чином, твердження 4 правильне для ГЛД вигляду (14) з двома гілками розгалужень ($i_0 = 2$).

Припустимо, що твердження 4 правильне для ГЛД (14) з m гілками розгалужень, $m \geq 2$. Розглянемо необхідні умови збіжності ГЛД вигляду (14), кількість гілок розгалужень якого дорівнює $m{+}1$. Використовуючи (20) і міркуючи аналогічно, як у випадку $m = 2$, маємо

$$R \leq R_m^*,\; \lim_{k\to\infty}\left(f_{k+1,m+1} + \frac{R}{f_{k,m+1}}\right) = \lim_{k\to\infty} f_{k+1,m} = F_m = \prod_{k=2}^{m+1}\left(1 - r_k\right),$$

де

$$r_{m+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4R}}{2},\; r_k = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1 - 5r_{k+1}}{1 - r_{k+1}}}\right),\; k = m, \ldots,\; 2\,.$$

Значення $F_{m+1} = \lim\limits_{k\to\infty} f_{k,m+1}$ — дійсний корінь рівняння

$$F_{m+1}^2 - \prod_{k=2}^{m+1}\left(1 - r_k\right) F_{m+1} + r_{m+1}\left(1 - r_{m+1}\right) = 0,$$

дискримінант якого дорівнює

$$D = \prod_{k=2}^{m+1}\left(1 - r_k\right)^2 - 4r_{m+1}\left(1 - r_{m+1}\right). \tag{22}$$

Для елементів послідовності $\{r_k\}$ і довільного натурального числа m справджується рівність

$$\prod_{k=l}^{m}(1-r_k)^2=\frac{1-r_l}{r_l}r_m\left(1-r_m\right),\ 1\le l\le m. \tag{23}$$

Дійсно, при $m=l$ рівність (23) очевидна:

$$(1-r_m)^2=\frac{1-r_m}{r_m}r_m\left(1-r_m\right).$$

Якщо рівність (23) справджується для деякого значення $l,\ 2\le l\le m$, то

$$\prod_{k=l-1}^{m}(1-r_k)^2=(1-r_{l-1})^2\,\frac{1-r_l}{r_l}r_m\left(1-r_m\right)=$$

$$=(1-r_{l-1})^2\,\frac{1}{r_{l-1}\left(1-r_{l-1}\right)}r_m\left(1-r_m\right)=\frac{\left(1-r_{l-1}\right)}{r_{l-1}}r_m\left(1-r_m\right),$$

отже, рівність (23) справджується для всіх $l, 1\le l\le m$.

Тому

$$r_{m+1}\left(1-r_{m+1}\right)=\frac{r_2}{1-r_2}\prod_{k=2}^{m+1}(1-r_k)^2. \tag{24}$$

Підставляючи рівність (24) у вираз (22), отримаємо

$$D=\prod_{k=2}^{m+1}(1-r_k)^2\left(1-4\frac{r_2}{1-r_2}\right)\ge 0\Rightarrow r_2\le r_2^*\le\frac{1}{5},$$

$$R_{m+1}=r_{m+1}\left(1-r_{m+1}\right)\le r_{m+1}^*\left(1-r_{m+1}^*\right)\le R_{m+1}^*.$$

Враховуючи оцінку (19), доходимо висновку, що

$$F_{m+1}=\frac{1}{2}\prod_{k=2}^{m+1}\left(1-r_k\right)\left(1-\sqrt{\frac{1-5r_2}{1-r_2}}\right)=\prod_{k=1}^{m+1}\left(1-r_k\right),$$

отже, твердження 4 правильне і для ГЛД вигляду (14), кількість гілок розгалужень якого дорівнює $m+1$. □

Таким чином, N-й член послідовності $\{R_m^*\}$, яка визначається співвідношеннями (13), — це максимально можливий радіус круга з центром у початку координат, який є множиною абсолютної збіжності ГЛД (14) з N гілками розгалужень.

Література

1. Антонова Т.М., Боднар Д.І. *Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду* // Теорія наближення функцій та її застосування. Праці ІМ НАН України. — 2000. — Т.31. — С. 5–18.

2. Баран О.Є. *Аналог ознаки Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1996. — Т.39, №2. — С. 39–46.

3. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. — К.: Наук. думка, 1986. — 176 с.
4. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. — М.: Мир, 1985. — 414 с.
5. Кучмінська Х.Й. Двовимірні неперервні дроби. — Львів: ІППММ ім. Я.С.Підстригача, 2010. — 218 с.
6. Сявавко М.С. Інтегральні ланцюгові дроби. — К.: Наук. думка, 1994. — 206 с.

Національний університет "Львівська політехніка",
Львів, Україна
e-mail: *tamara_ antonova@ukr.net*

Надійшло 19.09.2012

Antonova T.M. *On simple circular sets of absolute convergence for branched continued fractions of the special form*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 165–174.

The radiuses of the circles with centre in origin of coordinates that are simple sets of absolute convergence for branched continued fractions of the special form have been investigated.

Антонова Т.Н. *О простых круговых множествах абсолютной сходимости ветвящихся цепных дробей специального вида* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 165–174.

Исследованы значения радиусов кругов с центром в начале координат, являющихся простыми множествами абсолютной сходимости ветвящихся цепных дробей специального вида.