ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 329–336
doi:10.15330/cmp.6.2.329-336

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.329–336

Маслюченко В.К., Мироник О.Д.

ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ *KC*-ФУНКЦІЙ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПЛОЩИНІ СІДРА

Показано, що площина Сідра $\mathbb{M}$ — це σ-метризовний простір, який не має розвинення. У кожної квазінеперервної функції $f : X \to \mathbb{M}$ множина $C(f)$ точок неперервності залишкова в X. Досліджено множину $C(f)$ для функцій $f : X \times Y \to \mathbb{M}$, які квазінеперервні відносно першої змінної і неперервні відносно другої змінної.

Ключові слова і фрази: неперервність, квазінеперервність, KC-функція.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsjubynskyi str., 58012, Chernivtsi, Ukraine

Вступ

Площина Сідра $\mathbb{M}$, що була введена Дж. Сідром [2, приклад 9.1] і узагальнена в праці [10], — це вичерпний і неметризовний простір. В останні роки активізувалося вивчення множини $C(f)$ точок неперервності нарізно неперервних відображень зі значеннями у просторах, близьких до метризовних (див. [8] і вказану там літературу), отож надійшла черга і до відображень зі значеннями в $\mathbb{M}$. Так у [12] було досліджено множину $C(f)$ для нарізно неперервних відображень $f : X_1 \times ... \times X_n \to \mathbb{M}$, визначених на добутках зв'язних топологічних просторів. Застосований там метод полягав у тому, що на основі зв'язності образу $f(X_1 \times ... \times X_n)$ доводилося, що f набуває значень в одній з компонент зв'язності простору $\mathbb{M}$, а всі вони гомеоморфні числовій прямій $\mathbb{R}$. Між тим, при дослідженні множини $C(f)$ у нарізно неперервних відображень зі значеннями в $\mathbb{R}$, чи загальніше, в метризовних просторах Z, спочатку вивчають її для так званих KC-функцій $f : X \times Y \to Z$, які квазінеперервні відносно першої і неперервні відносно другої змінних, а потім розглядають функцію $f(x_1, ..., x_n)$ від n змінних як функцію $f(x, y)$ від двох змінних $x = (x_1, ..., x_{n-1})$ і $y = x_n$, адже часто нарізно неперервні відображення виявляються квазінеперервними. Тому природно виникло питання про множину $C(f)$ для KC-функцій $f : X \times Y \to \mathbb{M}$, яке і досліджується у цій праці. Крім того, добре відомо [13], що у квазінеперервних функцій $f : X \to Y$ зі значеннями в метризовному просторі Y множина $C(f)$ залишкова в X. Тому постало питання: чи буде $C(f)$ залишковою множиною і для квазінеперервних відображень $f : X \to \mathbb{M}$? З допомогою властивості зліченності ланцюжків чи інакше властивості Сусліна [11], [3, с.103] ми доводимо структурну теорему для квазінеперервних відображень $f : X \to \mathbb{M}$, з якої легко виводиться залишковість множини $C(f)$ для таких відображень. Ця ж властивість відіграє важливу роль і в дослідженні на сукупну неперервність KC-функцій $f : X \times Y \to \mathbb{M}$. Попередні версії отриманих тут результатів були анонсовані в тезах [9].

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 54E35.

© Маслюченко В.К., Мироник О.Д., 2014

У працях [5–7] були отримані загальні теореми про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень та їх аналогів зі значеннями в сильно σ-метризовних просторах, σ-метризовних просторах та просторах Мура. Щоб ними скористатися, постало питання: у який з цих класів входить площина Сідра? Тут ми з'ясовуємо, що площина Сідра $\mathbb{M}$ є σ-метризовним простором, але не має розвинення, отже, не є простором Мура. Питання про те, чи буде $\mathbb{M}$ сильно σ-метризовним залишається відкритим. З того, що $\mathbb{M}$ — це σ-метризовний простір, випливає [5], що для довільного топологічного простору у кожного квазінеперервного відображення $f : X \to \mathbb{M}$ множина $C(f)$ буде залишковою.

1 Квазінеперервні функції зі значеннями в $\mathbb{M}$

Функція $f : X \to Y$ називається *квазінеперервною* в точці x_0, якщо для довільного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ у просторі Y і для довільного околу U точки x_0 в X існує така відкрита непорожня множина G в просторі X, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$, і просто *квазінеперервною*, якщо вона є такою у кожній точці простору X. Множину A в топологічному просторі X ми називатимемо *квазівідкритою*, якщо $A \subseteq \overline{\mathrm{int} A}$.

Наступне твердження є характеризацією квазінеперервності.

Твердження 1.1. *Функція $f : X \to Y$ буде квазінеперервною тоді і тільки тоді, коли прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої множини V в просторі Y є квазівідкритою множиною в просторі X.*

Доведення. Необхідність. Нехай f — квазінеперервне відображення, V — довільна відкрита множина в просторі Y. Покладемо $A = f^{-1}(V)$ і покажемо, що множина A є квазівідкритою в просторі X. Для цього з'ясуємо, що $A \subseteq \overline{\mathrm{int} A}$. Візьмемо $x_0 \in A$ і покажемо, що $x_0 \in \overline{\mathrm{int} A}$. Ясно, що $y_0 = f(x_0) \in V$. Оскільки множина V відкрита, то вона є околом точки y_0. Нехай U — довільний окіл точки x_0 в X. З квазінеперервності функції f випливає, що існує така відкрита непорожня множина G в просторі X, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$. Оскільки множина G відкрита і $G \subseteq f^{-1}(V) = A$, то $G \subseteq \mathrm{int} A$. Отже, $\varnothing \neq G \subseteq U \cap \mathrm{int} A$. З того, що U — довільний окіл точки x_0, отримуємо, що $x_0 \in \overline{\mathrm{int} A}$. Отже, множина A квазівідкрита.

Достатність. Нехай $f : X \to Y$ — таке відображення, що для довільної відкритої множини V в просторі Y її прообраз $f^{-1}(V)$ є квазівідкритою множиною в просторі X. Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і доведемо, що f квазінеперервне в точці x_0. Нехай V — довільний відкритий окіл точки $y_0 = f(x_0)$ в просторі Y і U — довільний відкритий окіл точки x_0 в просторі X. За припущенням, прообраз $A = f^{-1}(V)$ — квазівідкрита множина в просторі X. Оскільки $y_0 \in V$, то $x_0 \in A$. Множина A квазівідкрита, тобто $A \subseteq \overline{\mathrm{int} A}$, а значить, $x_0 \in \overline{\mathrm{int} A}$. Тому $U \cap \mathrm{int} A \neq \varnothing$. Покладемо $G = U \cap \mathrm{int} A$. Множина G відкрита, непорожня, $G \subseteq U$ і $G \subseteq \mathrm{int} A \subseteq A$, а, отже, $f(G) \subseteq V$. Тому відображення f квазінеперервне в точці x_0. □

Ми будемо використовувати наступний добре відомий результат з [13].

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, Y — метризовний простір і $f : X \to Y$ — квазінеперервне відображення. Тоді $C(f)$ — залишкова множина.*

Нагадаємо, що *площиною Сідра* $\mathbb{M}$ ми називаємо топологічний простір, що складається з точок півплощини $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, топологічна структура на якому вводиться так: множина W буде околом точки $p = (x, y)$ з $y > 0$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon \in (0, y)$, що $W_\varepsilon(p) = \{x\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subseteq W$, і околом точки $p = (x, 0)$ в $\mathbb{M}$, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що $W_\varepsilon(p) = ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times [0, \varepsilon)) \setminus (\{x\} \times (0, \varepsilon)) \subseteq W$.

Позначимо $M_x = \{x\} \times (0, +\infty)$, де $x \in \mathbb{R}$ і $L_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$, і зауважимо, що відображення $\varphi : \mathbb{R} \to L_0$, для якого $\varphi(x) = (x, 0)$, і всі відображення $\psi_x : (0, +\infty) \to M_x$ такі, що $\psi_x(y) = (x, y)$, є гомеоморфізмами. В [12] було показано, що площина Сідра $\mathbb{M}$ подається у вигляді

$$\mathbb{M} = L_0 \sqcup \bigsqcup_{x \in \mathbb{R}} M_x \tag{1}$$

диз'юнктного об'єднання своїх відкрито-замкнених зв'язних підпросторів M_x та замкненого зв'язного підпростору L_0, які є разом з тим компонентами зв'язності площини Сідра.

Нам буде потрібне таке просте твердження.

Лема 1.1. *Нехай $(A_n)_{n=1}^\infty$, $(B_n)_{n=1}^\infty$ і $(C_n)_{n=1}^\infty$ — три послідовності підмножин топологічного простору X, причому $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^\infty A_n$ і для кожного n виконуються наступні умови $C_n \subseteq B_n \subseteq A_n$, $A_n \setminus B_n$ — ніде не щільні множини в X, а множини C_n залишкові в B_n. Тоді множина $C = \bigsqcup\limits_{n=1}^\infty C_n$ є залишковою в X.*

Доведення. За умовою для кожного n різниця $B_n \setminus C_n$ є множиною першої категорії в B_n, а значить, і в X. Тому і множина $L = \bigsqcup\limits_{n=1}^\infty (B_n \setminus C_n)$ — це множина першої категорії в X. Інше об'єднання $M = \bigsqcup\limits_{n=1}^\infty (A_n \setminus B_n)$ — це теж множина першої категорії в X. Зрозуміло, що $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^\infty A_n = \bigsqcup\limits_{n=1}^\infty B_n \sqcup M = \bigsqcup\limits_{n=1}^\infty C_n \sqcup L \sqcup M = C \sqcup L \sqcup M$, причому $L \sqcup M$ — це множина першої категорії в X. Тому C — залишкова в X. □

Кажуть, що топологічний простір X *має властивість зліченності ланцюжків* чи інакше *властивість Сусліна*, якщо довільна диз'юнктна система відкритих непорожніх множин простору X є не більш, ніж зліченна.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір з властивістю зліченності ланцюжків і $f : X \to \mathbb{M}$ — квазінеперервне відображення, $A_u = f^{-1}(M_u)$ для кожного $u \in \mathbb{R}$, $B = f^{-1}(L_0)$, $G = \mathrm{int}\overline{B}$ і $G_u = \mathrm{int}A_u$. Тоді:*

(i) множина $E = \{u \in \mathbb{R} : G_u \neq \varnothing\}$ не більш ніж зліченна, множина $W = G \sqcup (\bigsqcup\limits_{u \in E} G_u)$ відкрита і залишкова в X і $f(G) \subseteq L_0$, а $f(G_u) \subseteq M_u$ для кожного $u \in \mathbb{R}$;

(ii) множина $C(f)$ залишкова в X.

Доведення. (i) Оскільки множини M_u відкриті в $\mathbb{M}$, то за твердженням 1.1 A_u — квазівідкриті в X. Множини G_u відкриті, і оскільки $f(G_u) \cap f(G_v) \subseteq M_u \cap M_v = \varnothing$ при $u \neq v$, то $G_u \cap G_v = \varnothing$, якщо $u \neq v$. Крім того, $G_u \subseteq A_u \subseteq \overline{G}_u$. Зауважимо, що $A_u \neq \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли $G_u \neq \varnothing$. Оскільки множини G_u утворюють систему відкритих попарно диз'юнктних множин в X, а простір X має властивість зліченності ланцюжків, то множина $E = \{u \in \mathbb{R} : G_u \neq \varnothing\}$ не більш ніж зліченна.

Покажемо тепер, що $G \subseteq B$. Якби це було не так, то існував би такий елемент x_0, що $x_0 \in G$ і $x_0 \notin B$. Тоді $y_0 = f(x_0) \notin L_0$. А значить, $y_0 \in M_{u_0}$ для деякого $u_0 \in \mathbb{R}$. Множина M_{u_0} відкрита в $\mathbb{M}$, отже, є околом кожної своєї точки, зокрема, точки y_0. Тому, оскільки множина G є околом точки x_0, а функція f квазінеперервна, існує така відкрита і непорожня множина H, що міститься в G і $f(H) \subseteq M_{u_0}$. З того, що $H \subseteq G \subseteq \overline{B}$, випливає, що $H \cap B \neq \varnothing$. Але це неможливо, бо $f(H) \subseteq M_{u_0}$, $f(B) \subseteq L_0$ і $M_{u_0} \cap L_0 = \varnothing$. Отримана суперечність показує, що $G \subseteq B$.

Із зображення площини Сідра $\mathbb{M}$ у вигляді (1) випливає, що $X = B \sqcup (\bigsqcup\limits_{u \in E} A_u)$. Множина $W = G \sqcup (\bigsqcup\limits_{u \in E} G_u)$ відкрита, як об'єднання відкритих множин.

Зауважимо, що

$$B \setminus G \subseteq \overline{B} \setminus \mathrm{int}\overline{B} = \mathrm{fr}\,\overline{B} \qquad \text{і} \qquad A_u \setminus G_u \subseteq \overline{G}_u \setminus G_u = \mathrm{fr}\,G_u.$$

Множини $\mathrm{fr}\overline{B}$ і $\mathrm{fr}G_u$ ніде не щільні як межі замкненої і відкритих множин. Тому і різниці $B \setminus G$ та $A_u \setminus G_u$ — це ніде не щільні множини. Оскільки $X \setminus W = (B \setminus G) \sqcup \bigsqcup\limits_{u \in E}(A_u \setminus G_u)$ і множина E не більш ніж зліченна, то $X \setminus W$ — це множина першої категорії. Таким чином, W — відкрита залишкова множина в просторі X. Включення $f(G) \subseteq L_0$ випливає з того, що $G \subseteq B = f^{-1}(L_0)$, так само $f(G_u) \subseteq M_u$, бо $G_u \subseteq A_u = f^{-1}(M_u)$.

(ii) Оскільки множини G та G_u відкриті, то звуження $g = f|_G$ і $g_u = f|_{G_u}$ будуть квазінеперервними разом з f. При цьому $g(G) \subseteq L_0$ і $g_u(G_u) \subseteq M_u$, отже, g і g_u набувають значень у метризовних просторах L_0 і M_u. За теоремою 1 множина $C(g)$ буде залишковою в G, а множини $C(g_u)$ — залишкові в G_u для всіх $u \in E$. На основі відкритості G і G_u матимемо, що $C(g) = C(f) \cap G$ і $C(g_u) = C(f) \cap G_u$ для кожного $u \in E$. При цьому множини $B \setminus G$ і $A_u \setminus G_u$ ніде не щільні, отже, за лемою 1.1 множина

$$C = C(g) \sqcup (\bigsqcup_{u \in E} C(g_u))$$

є залишковою в X. Але

$$C = (C(f) \cap G) \sqcup (\bigsqcup_{u \in E} (C(f) \cap G_u)) = C(f) \cap W \subseteq C(f),$$

отже, і множина $C(f)$ залишкова в X. □

2 KC-ФУНКЦІЇ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В $\mathbb{M}$

Наведемо деякі позначення і означення, які нам будуть потрібні в цьому пункті.

Для функції $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Функція $f : X \times Y \to Z$ називається *KC-функцією*, якщо для кожного $x \in X$ функція $f^x : Y \to Z$ неперервна і для кожного $y \in Y$ функція $f_y : X \to Z$ квазінеперервна. Сукупність усіх таких функцій ми позначаємо символом $KC(X \times Y, Z)$.

Система $\mathcal{V}$ непорожніх відкритих множин називається *псевдобазою* топологічного простору X, якщо для кожної непорожньої відкритої в X множини G існує такий елемент $V \in \mathcal{V}$, що $V \subseteq G$. Якщо у просторі X є не більш ніж зліченна псевдобаза, то він сепарабельний, а кожний сепарабельний простір має властивість зліченності ланцюжків.

Нам знадобиться теорема, яка випливає з результатів праці [4].

Теорема 3. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — метризовний простір і $f \in KC(X \times Y, Z)$. Тоді:*

(i) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x,y) \in C(f)\}$ залишкова в X;

(ii) якщо Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ залишкова в X.

Теорема 4. *Нехай X — топологічний простір, який має не більш ніж зліченну псевдобазу, Y — зв'язний берівський простір і $f : X \times Y \to \mathbb{M}$ — KC-функція. $A_u = \{x \in X : f^x(Y) \subseteq M_u\}$ для $u \in \mathbb{R}$, $B = f^{-1}(L_0)$, $G_u = \mathrm{int}A_u$ і $H = \mathrm{int}\overline{B}$. Тоді:*

(i) $A_u = f_{y_0}^{-1}(M_u)$ для довільного $y_0 \in Y$ і кожного $u \in \mathbb{R}$;

(ii) $B = A \times Y$ для деякої множини $A \subseteq X$ і $H = G \times Y$, де $G = \mathrm{int}\overline{A}$, причому $H \subseteq B$;

(iii) множина $E = \{u \in \mathbb{R} : G_u \neq \varnothing\}$ не більш, ніж зліченна, а множина $W = G \sqcup (\bigsqcup_{u \in E} G_u)$ відкрита і залишкова в X, при цьому $f(G \times Y) \subseteq L_0$, а $f(G_u \times Y) \subseteq M_u$ для кожного $u \in E$;

(iv) якщо Y задовольняє першу аксіому зліченності, то для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X : (x,y) \in C(f)\}$ залишкова в X;

(v) якщо Y задовольняє другу аксіому зліченності, то множина $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ залишкова в X.

Доведення. (i) Візьмемо $y_0 \in Y$, $u \in \mathbb{R}$ і доведемо, що $A_u = f_{y_0}^{-1}(M_u)$. Покажемо спершу, що $A_u \subseteq f_{y_0}^{-1}(M_u)$. Візьмемо деяку точку $x_0 \in A_u$. Для неї $f^{x_0}(Y) \subseteq M_u$, зокрема, $f_{y_0}(x_0) = f^{x_0}(y_0) \in M_u$, отже, $x_0 \in f_{y_0}^{-1}(M_u)$. Покажемо тепер, що $f_{y_0}^{-1}(M_u) \subseteq A_u$. Візьмемо $x_0 \in f_{y_0}^{-1}(M_u)$, тоді $z_0 = f_{y_0}(x_0) = f^{x_0}(y_0) \in f^{x_0}(Y)$. Функція f^{x_0} неперервна, простір Y зв'язний, отже, образ $f^{x_0}(Y)$ є зв'язною множиною. Оскільки M_u — компонента зв'язності і $z_0 \in M_u \cap f^{x_0}(Y)$, то обов'язково мусить $f^{x_0}(Y) \subseteq M_u$. Отже, $x_0 \in A_u$.

(ii) Покажемо, що $B = A \times Y$, де A — деяка множина в X. Справді, нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in B$, тоді $f(p_0) \in L_0$. Перевіримо, що $\{x_0\} \times Y \subseteq B$. Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, що існує така точка $y_1 \in Y$, що $(x_0, y_1) \notin B$. Тоді $f(x_0, y_1) \notin L_0$, а значить, існує такий індекс $u_1 \in \mathbb{R}$, що $f(x_0, y_1) \in M_{u_1}$. Оскільки M_{u_1} — компонента зв'язності площини Сідра $\mathbb{M}$ і $M_{u_1} \cap f^{x_0}(Y) \neq \varnothing$, а множина $f^{x_0}(Y)$ зв'язна, то обов'язково $f^{x_0}(Y) \subseteq M_{u_1}$. Але $f^{x_0}(y_0) = f(p_0) \in L_0$, отже, $f^{x_0}(y_0) \notin M_{u_1}$, а значить, $f^{x_0}(Y) \nsubseteq M_{u_1}$, що приводить до суперечності. Тепер зрозуміло, що для множини $A = \mathrm{pr}_X(B)$ будемо мати, що $A \times Y = B$. Тоді $\overline{B} = \overline{A} \times Y$ і $H = \mathrm{int}\overline{B} = G \times Y$, де $G = \mathrm{int}\overline{A}$.

Покажемо тепер, що $H \subseteq B$. Припустимо, що це не так, тобто існує точка $p_0 = (x_0, y_0) \in H \setminus B$. Оскільки $p_0 \notin B$, то $z_0 = f(p_0) \notin L_0$, а, отже, існує індекс $u_0 \in \mathbb{R}$, такий, що $z_0 \in M_{u_0}$. Оскільки $p_0 \in H$ і множина H відкрита в $X \times Y$, то існують такі околи $\widetilde{U}$ і $\widetilde{V}$ точок x_0 і y_0 у просторах X і Y відповідно, що $\widetilde{U} \times \widetilde{V} \subseteq H$. З неперервності відображення f^{x_0} у точці y_0 і відкритості M_{u_0} в площині Сідра випливає, що існує такий відкритий окіл V точки y_0 в просторі Y, що $f^{x_0}(V) \subseteq M_{u_0}$ і $V \subseteq \widetilde{V}$. Оскільки $f_y(x_0) \in M_{u_0}$ для кожного

$y \in V$, то з квазінеперервності f_y у точці x_0 випливає, що для кожного $y \in V$ існує така відкрита непорожня в X множина O_y, що $O_y \subseteq \widetilde{U}$ і $f_y(O_y) \subseteq M_{u_0}$.

За умовою простір X має не більш ніж зліченну псевдобазу $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для кожного номера n розглянемо множини

$$B_n = \{y \in V : U_n \subseteq O_y\}.$$

Ясно, що $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = V$, бо $\mathcal{U}$ — це псевдобаза в X, а множини O_y відкриті в X. Оскільки простір Y берівський, то його відкрита непорожня множина V є множиною другої категорії в Y. Тому існує такий номер m, що множина B_m десь щільна, тобто $\mathrm{int}\overline{B_m} \neq \varnothing$. Покладемо $V_0 = V \cap \mathrm{int}\overline{B}_m$ і $B_0 = V_0 \cap B_m$. Оскільки V_0 — відкрита множина в X, $V_0 \subseteq \overline{B}_m$, то $V_0 \subseteq \overline{B}_0$. Крім того, множина $\widetilde{V}_m = \mathrm{int}\overline{B}_m$ відкрита і непорожня в Y і $\widetilde{V}_m \subseteq \overline{B}_m$. Тому $\widetilde{V}_m \subseteq \overline{\widetilde{V}_m \cap B_m}$, отже, $\widetilde{V}_m \cap B_m \neq \varnothing$. Але $B_m \subseteq V$, тому $\widetilde{V}_m \cap B_m \subseteq \widetilde{V}_m \cap V = V_0$, звідки випливає, що множина V_0 відкрита і непорожня, а тому $B_0 \neq \varnothing$. До того ж ясно, що $V_0 \subseteq V$.

Покладемо $U_0 = U_m$. Для кожного $y \in B_0$ будемо мати, що $y \in B_m$, а значить, $U_0 = U_m \subseteq O_y$, звідки випливає, що $f_y(U_0) \subseteq f_y(O_y) \subseteq M_{u_0}$. Це показує, що $f(U_0 \times B_0) \subseteq M_{u_0}$. Для кожного $x \in U_0$ відображення $f^x : Y \to \mathbb{M}$ неперервне, отже,

$$f^x(V_0) \subseteq f^x(\overline{B_0}) \subseteq \overline{f^x(B_0)} \subseteq \overline{f(\{x\} \times B_0)} \subseteq \overline{f(U_0 \times B_0)} \subseteq \overline{M}_{u_0} = M_{u_0}.$$

Тому, $f(U_0 \times V_0) = \bigcup\limits_{x\in U_0} f^x(V_0) \subseteq M_{u_0}$. Множина $O = U_0 \times V_0$ відкрита і непорожня. Взявши довільний елемент $y \in B_0$, ми отримаємо, що $U_0 = U_m \subseteq O_y \subseteq \widetilde{U}$, адже $y \in B_m$. Крім того, $V_0 \subseteq V \subseteq \widetilde{V}$. Таким чином, $O \subseteq \widetilde{U} \times \widetilde{V} \subseteq H \subseteq \overline{B}$. Тому $O \cap B \neq \varnothing$, отже, існує точка $p \in O \cap B$, для якої $f(p) \in L_0$. Але це неможливо, бо $f(O) \subseteq M_{u_0}$, а $M_{u_0} \cap L_0 = \varnothing$.

(iii) Зауважимо, що відкриті множини G_u диз'юнктні, бо такими є множини A_u, тому множина E не більш ніж зліченна, адже простір X має властивість зліченності ланцюжків, бо він має не більш ніж зліченну псевдобазу. За умовою теореми, $G_u \subseteq A_u$ для кожного $u \in E$ і $f(A_u \times Y) \subseteq M_u$, тому $f(G_u \times Y) \subseteq f(A_u \times Y) \subseteq M_u$. Оскільки $G \times Y = H \subseteq B = A \times Y$, то $f(G \times Y) \subseteq f(A \times Y) \subseteq L_0$. Множина $W = G \sqcup \bigsqcup\limits_{u\in E} G_u$ відкрита, як об'єднання відкритих множин. Зауважимо, що з умови (i) та твердження 1.1 випливає, що множини A_u є квазівідкритими, а тому $A_u \subseteq \overline{G}_u$. Звідси маємо, що $A_u \setminus G_u \subseteq \overline{G}_u \setminus G_u = \mathrm{fr}G_u$. Подібним чином, $A \setminus G = A \setminus \mathrm{int}\overline{A} \subseteq \overline{A} \setminus \mathrm{int}\overline{A} = \mathrm{fr}\overline{A}$. Оскільки множини $\mathrm{fr}G_u$ та $\mathrm{fr}\overline{A}$ є ніде не щільними, то такими ж будуть і їх підмножини $A \setminus G$ та $A_u \setminus G_u$ для кожного $u \in \mathbb{R}$. Із зображення площини Сідра (1) випливає, що $X = A \sqcup (\bigsqcup\limits_{u\in E} A_u)$. Тому $X \setminus W = (A \sqcup \bigsqcup\limits_{u\in E} A_u) \setminus (G \sqcup \bigsqcup\limits_{u\in E} G_u) = (A \setminus G) \sqcup (\bigsqcup\limits_{u\in E} A_u \setminus G_u)$ — множина першої категорії, як зліченне об'єднання ніде не щільних множин. Отже, множина W є залишковою в X.

(iv) Нехай простір Y задовольняє першу аксіому зліченності. Розглянемо відображення $g_u = f|_{G_u \times Y}$ та $g = f|_{G\times Y}$, які є KC-функціями, як звуження KC-функції на відкриту множину. При цьому $g_u(G_u \times Y) \subseteq M_u$ і $g(G \times Y) \subseteq L_0$, тобто відображення g та g_u набувають значень у метризовних просторах M_u та L_0. За теоремою 3 (i) маємо, що множини $C_y(g_u)$ та $C_y(g)$ є залишковими в G_u та G відповідно. Множини G_u та G відкриті, отже, $C_y(g_u) = C_y(f) \cap G_u$ і $C_y(g) = C_y(f) \cap G$. Оскільки множини $A \setminus G$ та $A_u \setminus G_u$ є ніде не щільними, то за лемою 1.1 множина $C = C_y(g) \sqcup (\bigsqcup\limits_{u\in E} C_y(g_u))$ є залишковою в X. Крім того, $C = (C_y(f) \cap G) \sqcup (\bigsqcup\limits_{u\in E} (C_y(f) \cap G_u) = C_y(f) \cap W$, отже, $C \subseteq C_y(f)$. Звідси випливає, що множина $C_y(f)$ сама є залишковою в X.

(v) Нехай простір Y задовольняє другу аксіому зліченності. Розглянувши ті ж відображення $g_u = f|_{G_u \times Y}$ та $g = f|_{G \times Y}$, які є KC-функціями, як звуження KC-функції на відкриту множину, і міркуючи аналогічно до доведення властивості (iv), на основі твердження (ii) теореми 3 можна довести, що множина $C_Y(f)$ є залишковою в просторі X. $\square$

3 Площина Сідра і σ-метризовні простори та простори Мура

Нагадаємо, що топологічний простір Z називається *σ-метризовним* (*сильно σ-метризовним*), якщо існує така зростаюча послідовність його замкнених метризовних підпросторів Z_n, що $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ (і для кожної збіжної в Z послідовності точок z_k існує таке n, що $\{z_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq Z_n$). Така послідовність підпросторів $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *вичерпуванням* σ-метризовного чи сильно σ-метризовного простору Z.

Теорема 5. *Площина Сідра $\mathbb{M}$ — це σ-метризовний простір з вичерпуванням $Z_n = \{(x, y) \in \mathbb{M} : x \in \mathbb{R} \text{ і } y = 0 \text{ або } y \geq \frac{1}{n}\}$.*

Доведення. Розглянемо підпростори $L_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ і $M_{x,n} = \{x\} \times [\frac{1}{n}, +\infty)$ площини Сідра $\mathbb{M}$. Очевидно, що простір L_0 гомеоморфний до $\mathbb{R}$, а простори $M_{x,n}$ гомеоморфні до $[\frac{1}{n}, +\infty)$, отже, як L_0, так і $M_{x,n}$ — це метризовні простори. Ясно, що

$$Z_n = L_0 \sqcup \bigsqcup_{x \in \mathbb{R}} M_{x,n},$$

причому з означення топологічної структури простору $\mathbb{M}$ легко випливає, що Z_n — це пряма сума просторів L_0 і $M_{x,n}$, де $x \in \mathbb{R}$. Але пряма сума метризовних просторів теж буде метризовним простором [3, с. 384, теорема 4.2.1], отже, всі підпростори Z_n простору $\mathbb{M}$ метризовні. Крім того, вони, очевидно, замкнені і $Z_n \subseteq Z_{n+1}$ для кожного n. Таким чином, послідовність $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ — це вичерпування σ-метризовного простору $\mathbb{M}$. $\square$

Зауважимо, що побудована в теоремі 5 послідовність просторів Z_n не буде вичерпуванням $\mathbb{M}$ як сильно σ-метризовного простору. Справді, легко перевірити, що послідовність точок $z_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ збігається до точки $0 = (0, 0)$ в $\mathbb{M}$, але $\{z_k : k \in \mathbb{N}\} \nsubseteq Z_n$ для кожного номера n. Авторам невідомо, чи буде $\mathbb{M}$ сильно σ-метризовним простором.

З теореми 5 і теореми 2 статті [5] негайно випливає такий результат

Теорема 6. *Для кожного топологічного простору X у довільного квазінеперервного відображення $f : X \to \mathbb{M}$ множина $C(f)$ залишкова в X.*

Нагадаємо, що *розвиненням* топологічного простору Z називається така послідовність його відкритих покриттів $\mathcal{W}_n$, що для кожного $z \in Z$ послідовність множин

$$\mathrm{st}_{\mathcal{W}_n}(z) = \bigcup \{W : z \in W \in \mathcal{W}_n\}$$

утворює базу околів точки z в Z. *Простір Мура* — це регулярний простір з розвиненням.

Теорема 7. *Площина Сідра $\mathbb{M}$ не має розвинення, отже, не є простором Мура.*

Доведення. Справді, $\mathbb{M}$ як вичерпний гаусдорфовий простір [2] буде паракомпактом [1], а кожний паракомпакт є колективно нормальним простором [3, с. 453, теорема 5.1.18]. Якби у $\mathbb{M}$ було розвинення, то за метризаційним критерієм Бінґа [3, с. 488, теорема 5.4.1] простір $\mathbb{M}$ мав би бути метризовним, а це не так [2, 10]. $\square$

REFERENCES

[1] Borges C. *On stratifiable spaces*. Pacific J. Math. 1966, **17** (1), 1–16. doi:10.2140/pjm.1966.17.1

[2] Ceder J. *Some generalizations of metric spaces*. Pacific J. Math. 1961, **11**, 105–126.

[3] Engelking R. General topology. Mir, Moscow, 1986. (in Russian)

[4] Maslyuchenko V.K. *Hahn Spaces and Dini's Problem*. J. Math. Sci. 2001, **107** (1), 3577–3582. doi: 10.1023/A:1011990123042 (translation of Math. Methods Phys. Mech. Fields. 1998, **41** (4), 39–45. (in Ukrainian))

[5] Maslyuchenko V.K., Filipchuk O.I. *Pointwise discontinuity of K_hK-functions with values in σ-metrizable spaces*. Sci. Bull. Chernivtsi Univ. 2004, **191–192**, 103–106. (in Ukrainian)

[6] Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Filipchuk O.I. *Joint continuity of K_hC-functions with values in Moore spaces*. Ukrainian Math. J. 2008, 60 (11), 1803–1812. doi:10.1007/s11253-009-0170-8 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 2008, **60** (11), 1539–1547. (in Ukrainian))

[7] Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Shyshyna O.I. *Joint continuity of horizontally quasicontinuous mappings with values in σ-metrizable spaces*. Math. Methods Phys. Mech. Fields 2002, **45** (1), 42–46. (in Ukrainian)

[8] Maslyuchenko V., Myronyk O. *Joint continuity of mappings with values in generalized metric spaces.* In: Proc. of Sci. Conf. "Modern problems of probability and mathematical analysis", Vorokhta, Ukraine, 20–26 February, 2012, Precarpathian Univ., Ivano-Frankivsk, 2012, 5–6. (in Ukrainian)

[9] Maslyuchenko V., Myronyk O. *KC-functions with values in the Ceder plane.* In: Proc. of Sci. Conf. "Modern problems of probability and mathematical analysis", Ivano-Frankivsk, Ukraine, 24 February – 2 March, 2014, Precarpathian Univ., Ivano-Frankivsk, 2014, 73–76. (in Ukrainian)

[10] Maslyuchenko V.K., Myronyk O.D. *The Ceder product and stratifiable spaces*. Bukovinian Math. J. 2013, **1** (1-2), 107–112. (in Ukrainian)

[11] Moran W. *Separate continuity and supports of measures*. J. London Math. Soc. 1969, **44**, 320–324. doi: 10.1112/jlms/s1-44.1.320

[12] Myronyk O.D. *About separately continuous mappings with values in the Ceder plane*. Bukovinian Math. J. 2013, **1** (3-4), 100–105. (in Ukrainian)

[13] Neubrunn T. *Quasi-continuity*. Real Anal. Exchange 1988-1989, **14** (3), 259–306.

Надійшло 10.04.2014

Maslyuchenko V.K., Myronyk O.D. *On continuity of KC-functions with values in Ceder plane*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 329–336.

We show that the Ceder plane $\mathbb{M}$ is a σ-metrizable space, which does not have a development. For every quasicontinuous mapping $f : X \to \mathbb{M}$ the continuity point set $C(f)$ is residual. We investigate the continuity point set $C(f)$ of a mapping $f : X \times Y \to \mathbb{M}$, which is quasicontinuous with respect to the first variable and continuous with respect to the second one.

Key words and phrases: continuity, quasicontinuity, KC-function.

Маслюченко В.К., Мироник О.Д. *О непрерывности KC-функций со значениями в плоскости Сидра* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 329–336.

Показано, что плоскость Сидра $\mathbb{M}$ — это σ-метризуемое пространство, у которого нет измельчения. У каждой квазинепрерывной функции $f : X \to \mathbb{M}$ множество $C(f)$ точек непрерывности будет остаточным в X. Исследовано множество $C(f)$ для функций $f : X \times Y \to \mathbb{M}$, квазинепрерывных по первой переменной и непрерывных по второй.

Ключевые слова и фразы: непрерывность, квазинепрерывность, KC-функция.