ISSN 2075-9827 **http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp**
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 237–241 Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.237–241
doi:10.15330/cmp.6.2.237-241

Заболоцький М.В., Мостова М.Р.

АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

Отримано апроксимаційну теорему для логарифмічної похідної F цілих функцій нульового порядку і за її допомогою знайдено асимптотику F зовні виняткової множини.

Ключові слова і фрази: ціла функція, логарифмічна похідна, нульовий порядок, щільність, асимптотика.

Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
E-mail: m_zabol@franko.lviv.ua (Заболоцький М.В.), memyr23@gmail.com (Мостова М.Р.)

Вступ

Нехай f — ціла функція скінченного додатного порядку ρ, $\rho(r)$ — уточнений порядок f (див., наприклад, [1, с. 69]). Позначимо через $H_+^*(r^{\rho(r)})$ клас цілих функцій f цілком регулярного зростання (ц. р. зр.). Добре відомо, що ц. р. зр. цілої функції додатного нецілого порядку еквівалентне існуванню кутової щільності її нулів відносно функції порівняння $r^{\rho(r)}$.

Будемо говорити, що множина $E \subset \mathbb{C}$ має верхню μ-щільність, $1 < \mu \le 2$, якщо її можна покрити такою послідовністю кругів $\{z\colon |z - z_j| < r_j\}$, $j = 1, 2, \ldots,$ $z_j \to \infty$, що

$$D_\mu(E)\colon = \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\mu} \sum_{|z_j|\le r} r_j^\mu = \eta,\ 0 \le \eta < +\infty.$$

Сім'ю таких множин позначимо C_η^μ.

В [2] для $f \in H_+^*(r^{\rho(r)})$ знайдено асимптотичні формули її логарифмічної похідної $F(z) = zf'(z)/f(z)$, а саме

$$F(re^{i\varphi}) = g(\varphi)r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \quad r \to +\infty, \quad re^{i\varphi} \notin E, \quad E \in C_0^2, \tag{1}$$

де $g \in L_1[0, 2\pi]$. За результатами роботи [3] бачимо, що з асимптотики (1) випливає ц. р. зр. цілої функції f.

Асимптотику логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку, нулі якої мають кутову щільність відносно функції $r^{\lambda(r)}$, знайдено в [4]. Тут $\lambda(r)$ — нульовий уточнений порядок лічильної функції $n(r) = n(r, 0, 2\pi)$ нулів f, тобто:

1) $\lambda(r)$ — невід'ємна, неперервно диференційовна на $[0, +\infty)$ функція;

2) $\lambda(r) \to 0$ при $r \to +\infty$;

УДК 517.53
2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D20.

3) $r\lambda'(r)\ln r + \lambda(r) \to 0$ при $r \to +\infty$;

4) $r^{\lambda(r)} \nearrow +\infty$ при $r \to +\infty$;

5) $0 < \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\, n(r)/r^{\lambda(r)} < +\infty$.

В роботі буде знайдена асимптотика логарифмічної похідної для цілої функції нульового порядку, нулі якої мають кутову щільність відносно функції $v(r)$.

1 Формулювання результатів

Нехай L — клас додатних, неспадних, необмежених, неперервно диференційовних на $\mathbb{R}_+$ функцій v таких, що $rv'(r)/v(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Легко переконатися, що $r^{\lambda(r)} \in L$. Позначимо через $H_0(v)$, $v \in L$, клас цілих функцій f нульового порядку, для яких $0 < \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\, n(r)/v(r) < +\infty$. Нехай $n(r,\alpha,\beta)$ — кількість нулів цілої функції в секторі $\{z\colon |z| \le r, \alpha \le arg\, z < \beta\}, 0 \le \alpha < \beta < 2\pi$. Будемо говорити, що нулі функції $f \in H_0(v)$ мають v-щільність (кутову v-щільність), якщо існує границя

$$\Delta\colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{v(r)} \qquad \left(\Delta(\alpha,\beta)\colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r,\alpha,\beta)}{v(r)}\right)$$

для всіх α і β, що не належать деякій не більш ніж зліченній множині з $[0,2\pi], 0 < \Delta < +\infty$. Через $H_0^*(v)$ позначимо підклас функцій $f \in H_0(v)$, нулі яких мають кутову v- щільність.

Теорема 1. *Нехай $v \in L$, $f_1, f_2 \in H_0(v)$, послідовності нулів $(a_{1,k})$, $(a_{2,k})$ відповідно функцій f_1, f_2 мають v-щільність, $|a_{1,k}| = |a_{2,k}|$, $|arg\ a_{1,k} - arg\ a_{2,k}| < \delta$. Тоді для будь-яких $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $1 < \mu \le 2$ існують $\delta > 0$ і така множина E, $D_\mu(E) < \eta$, що*

$$|F_1(z) - F_2(z)| < \varepsilon v(r), \quad z \notin E. \tag{2}$$

Теорема 2. *Нехай $v \in L$, $f \in H_0^*(v)$. Тоді існує така множина $E \in C_0^\mu$, $1 < \mu \le 2$, що*

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(v(r)), \quad r \to +\infty, \quad re^{i\varphi} \notin E. \tag{3}$$

2 Доведення основних результатів

При доведенні теореми 1 будемо використовувати такий аналог леми Картана.

Лема ([5]). *Якщо $b_j \in \mathbb{C}$, $1 \le j \le n$, $1 < \mu \le 2$, $H > 0$, то зовні деякої системи не більше ніж n кругів з радіусами r_k таких, що $\sum_k r_k^\mu \le (2H)^\mu$ і кожний круг містить хоча б одну точку b_j, виконується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z-b_j|} \le \frac{\mu}{\mu-1}\frac{n}{H}.$$

Доведення теореми 1. Нехай $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $1 < \mu \le 2$ задані довільні числа, $n(r) = n(r,0,f_1) = n(r,0,f_2) = \Delta v(r) + o(v(r))$, $r \to +\infty$,

$$\xi(r) = \sup_{t\ge r} \frac{v(2r) - v(r/2)}{v(r)}.$$

Очевидно, що $\xi(r) \searrow 0$ при $r \to +\infty$. Виберемо $\delta > 0$, $r_0 > 0$ так, щоб $4\delta\Delta < \varepsilon/3$, $16\mu/(\mu-1)\Delta\,(\xi(r))^{1/(2\mu)} < \varepsilon/6$, $64^\mu\sqrt{\xi(r/4)} < \eta$, $r \ge r_0$. Легко бачити, що

$$\begin{aligned} F_j(z) &= z\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{z-a_{j,k}} = z\sum_{|a_{j,k}|<r/2}\frac{1}{z-a_{j,k}} + z\sum_{|a_{j,k}|>2r}\frac{1}{z-a_{j,k}} + z\sum_{r/2\le|a_{j,k}|\le 2r}\frac{1}{z-a_{j,k}} \\ &= F_j^{(1)}\left(z,\frac{r}{2}\right) + F_j^{(2)}(z,2r) + F_j^{(3)}\left(z,\frac{r}{2},2r\right), \qquad |z|=r,\ j=1,2. \end{aligned} \tag{4}$$

Оцінимо спочатку $|F_j^{(1)}(z,r/2)|$ і $|F_j^{(2)}(z,2r)|$. При $|a_{j,k}| < r/2$, $|arg\ a_{1,k} - arg\ a_{2,k}| < \delta$ маємо $|a_{1,k}-a_{2,k}| < \delta r/2$. Тому

$$\left|F_1^{(1)}\left(z,\frac{r}{2}\right) - F_2^{(1)}\left(z,\frac{r}{2}\right)\right| \le r\sum_{|a_{j,k}|<r/2}\frac{|a_{1,k}-a_{2,k}|}{(r-|a_{1,k}|)(r-|a_{2,k}|)} < 2\delta n\left(\frac{r}{2}\right) < 4\delta\Delta v(r) < \frac{\varepsilon}{3}v(r). \tag{5}$$

При $|a_{j,k}| > 2r$ маємо

$$\begin{aligned} \left|F_1^{(2)}(z,2r) - F_2^{(2)}(z,2r)\right| &\le r\sum_{|a_{j,k}|>2r}\frac{|a_{1,k}-a_{2,k}|}{(|a_{1,k}|-r)(|a_{2,k}|-r)} \le r\int_{2r}^{+\infty}\frac{t\delta/2}{(t-r)^2}dn(t) \\ &= \frac{\delta r}{2}\int_{2r}^{+\infty}\frac{dn(t)}{t(1-r/t)^2} \le 2\delta r\int_{2r}^{+\infty}\frac{dn(t)}{t} = -\delta n(2r) + 2\delta r\int_{2r}^{+\infty}\frac{n(t)}{t^2}dt \\ &< 3\delta\Delta r\int_{2r}^{+\infty}\frac{v(t)}{t^2}dt \le 3\delta\Delta r\frac{v(2r)}{\sqrt{2r}}\int_{2r}^{+\infty}t^{-3/2}dt = 3\delta\Delta v(2r) \le 4\delta\Delta v(r) < \frac{\varepsilon}{3}v(r), \end{aligned} \tag{6}$$

оскільки $v(r)/\sqrt{r} \searrow 0$ при $r \to +\infty$.

Нехай (a_k) послідовність, яка містить всі члени послідовностей $(a_{1,k})$ і $(a_{2,k})$, а, отже, її лічильною функцією буде $2n(r)$. Маємо

$$\begin{aligned} \left|F_1^{(3)}\left(z,\frac{r}{2},2r\right) - F_2^{(3)}\left(z,\frac{r}{2},2r\right)\right| &\le \left|F_1^{(3)}\left(z,\frac{r}{2},2r\right)\right| + \left|F_2^{(3)}\left(z,\frac{r}{2},2r\right)\right| \\ &\le r\sum_{r/2\le|a_k|\le 2r}\frac{1}{|z-a_k|} = r\psi(z,r). \end{aligned} \tag{7}$$

Для оцінки $\psi(z,r)$ скористаємося лемою. Нехай $R_j = 2^{2^j}$, $j = 0,1,2,\ldots$,

$$K_j = \{z\colon R_j/2 < |z| < 2R_j\}, \quad n_j = 2n(2R_j) - 2n(R_j/2), \quad H_j = R_j\xi^{1/(2\mu)}(r/4).$$

Очевидно, що $\{z\colon 1 < |z| < +\infty\} = \bigcup_{j=0}^{+\infty}K_j$. Оскільки $n_j \le 2\Delta(v(2R_j) - v(R_j/2)) \le 4\Delta\xi(R_j)v(R_j)$, то зовні деякої системи кругів $C_{j\nu} = \{z\colon |z-z_{j\nu}| < r_{j\nu}\}$, $1 \le \nu \le s_j$, $\sum_{\nu=1}^{s_j} r_{j\nu}^\mu \le (4H_j)^\mu = (4R_j)^\mu\xi^{1/2}(r/4)$ правильна оцінка

$$\psi(z,R_j) \le \frac{\mu}{\mu-1}\frac{n_j}{H_j} \le \frac{\mu}{\mu-1}\frac{4\Delta\xi(R_j)v(R_j)}{\xi^{1/2\mu}(r/4)R_j} \le \frac{\mu}{\mu-1}\frac{4\Delta v(R_j)}{R_j}\xi^{1-1/(2\mu)}(R_j).$$

Приймемо $E = \left(\bigcup_{j=0}^{+\infty}\bigcup_{\nu=1}^{s_j}C_{j\nu}\right)\bigcup\{z\colon |z| < r_0\}$. Тоді для $r \ge r_0$

$$\sum_{j=0}^{m+1}\sum_{\nu=1}^{s_j} r_{j\nu}^\mu \le \sum_{j=0}^{m+1}\left(4\xi^{1/(2\mu)}\left(\frac{r}{4}\right)R_j\right)^\mu = 4^\mu\xi^{1/2}\left(\frac{r}{4}\right)\frac{R_{m+1}^\mu 2^{2\mu}-1}{2^{2\mu}-1} < \frac{64^\mu}{3}\xi^{1/2}\left(\frac{r}{4}\right)r^\mu < \frac{\eta}{3}r^\mu,$$

а, отже, $D_\mu(E) < \eta$.

Нехай $R_m \le r < R_{m+1}$. Тоді $R_{m+1}/4 \le r \le 4R_m$ і для $r \ge r_0$

$$\psi(z, R_m) \le \frac{\mu}{\mu-1} \frac{4\Delta v(R_m)}{R_m} \xi^{1-1/(2\mu)}(R_m) < \frac{\mu}{\mu-1} \frac{16\Delta v(r)}{r} \xi^{1-1/(2\mu)}\left(\frac{r}{4}\right) < \frac{\varepsilon}{6}\frac{v(r)}{r} \tag{8}$$

і, аналогічно,

$$\psi(z, R_{m+1}) \le \frac{\mu}{\mu-1} \frac{4\Delta v(R_{m+1})}{R_{m+1}} \xi^{1-1/(2\mu)}(R_{m+1}) < \frac{\varepsilon}{6}\frac{v(r)}{r}. \tag{9}$$

Враховуючи, що $\psi(z,r) \le \psi(z,R_m) + \psi(z,R_{m+1})$, з (7), (8) та (9) маємо

$$\left|F_1^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right)\right| + \left|F_2^{(3)}\left(z, \frac{r}{2}, 2r\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}v(r), \quad z \notin E. \tag{10}$$

Взявши до уваги (4)–(6), (10) отримуємо (2), що доводить теорему 1. □

Доведення теореми 2. У випадку, коли всі нулі f розташовані на скінченній системі променів $\Gamma_m = \bigcup_{j=1}^m \{z \colon arg\ z = \psi_j\}$, доведення теореми аналогічне до доведення теореми 2 з [4]. Ми отримуємо

$$F(re^{i\varphi}) = n(r) + o(v(r)), \quad r \to +\infty, \quad z \notin \Gamma_m, \tag{11}$$

причому (11) виконується рівномірно щодо $\varphi \in [0,2\pi] \setminus \bigcup_{j=1}^m \{z \colon |arg\ z - \psi_j| \ge \gamma\}$, де $\gamma > 0$ як завгодно мале число. Перехід до загального випадку здійснюємо використовуючи теорему 1.

Зафіксуємо $\varepsilon = \varepsilon_n = 1/n, \eta = \eta_n = 2^{-(n+1)}$. За теоремою 1 існують $\delta > 0$, система таких променів $(\psi_j)_{j=0}^m$, $0 = \psi_0 < \psi_1 < \dots \psi_m = 2\pi$, що $|\psi_{j+1} - \psi_j| < \delta$, $j = \overline{0, m-1}$, ціла функція $F_{1,n}(z) = z\sum_{k=1}^{+\infty} 1/(z - a'_k)$ з полюсами a'_k, $|a'_k| = |a_k|$ і, якщо $\psi_j \le arg\ a_k < \psi_{j+1}$, $arg\ a'_k = \psi_j$. Для $z = re^{i\varphi}$, $r \ge r_n$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $|\varphi - \psi_j| \ge \gamma$, де $\gamma > 0$ достатньо мале число, з асимптотичної формули (11) отримуємо, що

$$|F_{1,n}(z) - n(r)| < \frac{\varepsilon_n}{4}v(r).$$

Крім того, за теоремою 1 існує така система кругів C'_n, $D_\mu(C'_n) < \eta_n/4$, зовні якої

$$|F(z) - F_{1,n}(z)| < \frac{\varepsilon_n}{4}v(r).$$

Тому отримуємо, що

$$|F(z) - n(r)| < \frac{\varepsilon_n}{2}v(r), \tag{12}$$

для $r \ge r_n$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $|\varphi - \psi'_j| \ge \gamma$, $0 \le j \le m-1$, $z \notin C'_n$.

Будуємо $F_{2,n}$ з полюсами, що лежать на системі променів $\left(\psi'_j\right)$, $0 = \psi'_0 < \psi'_1 < \dots \psi'_m = 2\pi$, такими, що

$$\left(\bigcup_{j=1}^{s-1} \{\varphi \colon |\varphi - \psi'_j| < \gamma\}\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \{\varphi \colon |\varphi - \psi_j| < \gamma\}\right) = \varnothing.$$

Тоді як і в попередньому випадку, існує система кругів C''_n, $D_\mu(C''_n) < \eta_n/4$, зовні якої виконується (12) для $r \ge r_n$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $|\varphi - \psi'_j| \ge \gamma$, $0 \le j \le s-1$. А, отже, (12) виконується для всіх $\varphi \in [0,2\pi]$, $r \ge r_n$, $z \notin C_n = C'_n \bigcup C''_n$, $D_\mu(C_n) < \eta_n/2$.

Нехай
$$C_n = \bigcup_{j=1}^{+\infty} C_{nj},\ C_{nj} = \{z\colon |z - z_{nj}| < r_{nj}\}.$$
При всіх достатньо великих r
$$\sum_{|z_{nj}| \le r} r_{nj}^{\mu} < r^{\mu}\eta_n/2 \le r^{\mu}/8.$$

Тоді для достатньо великих j маємо $r_{nj}^{\mu} < |z_{nj}|^{\mu}/4$ і $r_{nj} < |z_{nj}|/2$. Виберемо таку послідовність $(R_k)_1^{+\infty}$, що $R_{k+1} > (k+1)R_k, k = 1, 2, \ldots$, для $r \ge R_n,\ z \notin C_n$ виконується (12), і позначимо
$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{R_n \le |z_{nj}| < R_{n+3}} \{z\colon |z - z_{nj}| < r_{nj}\} = \bigcup_{s=1}^{+\infty} \{z\colon |z - z_s| < r_s\}.$$

Далі, аналогічно як в [3], показуємо, що $D_\mu(E) = 0$ і виконується (3) рівномірно по $\varphi \in [0, 2\pi)$, що й доводить теорему 2. $\square$

References

[1] Levin B. Ja. Distribution of zeros of entire functions. Hos.-Tehn. Publ., Moscow, 1956. (in Russian)

[2] Goldberg A. A., Korenkov N. E. *Asymptotics of the logarithmic derivative of an entire function of completely regular growth*. Sibirsk. Mat. Zh. 1980, **21** (3), 63–79. (in Russian)

[3] Goldberg A. A., Strochyk N. N. *Asymptotic behavior of meromorphic functions of completely regular growth and their logarithmic derivatives*. Sibirsk. Mat. Zh. 1985, **26** (6), 29–38. (in Russian)

[4] Zabolotskyj M. V. *Asymptotics of the logarithmic derivative for an entire function of order zero*. Ukrain. Mat. Zh. 1999, **51** (1), 32–40. (in Ukrainian)

[5] Macintyre A. J., Fuchs W. H. J. *Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial*. J. Lond. Math. Soc. 1940. **15**, 162–168.

Надійшло 04.04.2014

Zabolotskyj M.V., Mostova M.R. *Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of entire functions of zero order*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 237–241.

We get an approximation theorem for the logarithmic derivative F of entire functions of zero order and with it's help establish the asymptotic of F outside of the exceptional set.

Key words and phrases: entire function, logarithmic derivative, zero order, density, asymptotics.

Заболоцкий Н.В., Мостовая М.Р. *Асимптотическое поведение логарифмической производной целых функций нулевого порядка* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 237–241.

Получена аппроксимационная теорема для логарифмической производной F целых функций нулевого порядка и с ее помощью найдено асимптотику F снаружи исключительного множества.

Ключевые слова и фразы: целая функция, логарифмическая производная, нулевой порядок, плотность, асимптотика.