ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 64–67 Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №1, С.64–67
doi:10.15330/cmp.6.1.64-67

Кудзіновська І.П.

Математичне моделювання та чисельний розрахунок вимушених коливань п'єзокерамічного сферичного сегмента

Розглядаються коливання поляризованого за товщиною п'єзокерамічного сегмента, що збуджуються гармонічно змінною різницею електричних потенціалів. Розв'язок відповідної двовимірної задачі електропружності шукається у вигляді розкладів за поліномами Лежандра у поєднанні з методом степеневих рядів. Досліджується частотний спектр і кінематика відповідних мод для перших трьох значень індекса полінома Лежандра. Особливу увагу приділено поведінці досліджуваних характеристик в області основного товщинного резонансу.

Ключові слова і фрази: математичне моделювання, п'єзокерамічний сферичний сегмент, вимушені гармонічні коливання, чисельний розрахунок, частотний спектр, кінематика мод коливань.

National Aviation University, 1 Komarova str., 03058, Kyiv, Ukraine
E-mail: kudzinovskaya@ukr.net

Вступ

Для роботи електромеханічних перетворювачів енергії плоскої або викривленої форми суттєвий інтерес становлять товщинні форми коливань за наявності лише нормальної до серединної поверхні складової вектора переміщень. Особливе значення при цьому мають моди з рівномірним по поверхні досліджуваного об'єкта розподілом нормальних переміщень (так звані «поршневі» моди). У цьому випадку розв'язання відповідної крайової задачі, в силу її одномірності, не викликає особливої складності, і у випадку, коли об'єктом дослідження є куля, може бути представлений у замкненому вигляді [4]. Однак, як показали експериментальні дослідження на дискових резонаторах, збудження таких «поршневих» мод пов'язано з суттєвими труднощами через наявність цілого ряду небажаних близько розташованих резонансів з іншими формами коливань, змінними по поверхні. Для вивчення цього питання, яке має теоретичне і практичне значення, необхідно провести дослідження резонансних характеристик і кінематики відповідних форм коливань на основі просторових рівнянь теорії електропружності з урахуванням як товщинних, так і тангенціальних переміщень.

1 Постановка задачі

У даній роботі розглядається товстостінна сферична п'єзокерамічна оболонка, яка віднесена до сферичних координат r, θ, ψ і вирізана із сфери конусом $\theta = \theta_0 = const$.

УДК 517.958:534.1
2010 *Mathematics Subject Classification:* 97M10.

Сферичні поверхні $r = r_0 \pm h$ вільні від механічних напружень і покриті електродами, які в загальному випадку можуть бути розрізними, а торцева поверхня $\theta = \theta_0$, $r \in [r_0 - h, r_0 + h]$ не має електричного покриття. Збудження коливань проводиться гармонічно змінною різницею електричних потенціалів за законом $2V_0\varphi^{(0)}(\theta)\cos\omega t$.

2 Математична модель вимушених коливань

Повна система рівнянь для даної задачі, що складається з рівнянь руху, квазістатичного наближення рівнянь Максвелла, співвідношень Коші та матеріальних залежностей, наведена в роботі [3]. Розв'язок цієї задачі, як і у випадку замкненої сфери [3], будемо шукати у вигляді розкладу в ряди за поліномами Лежандра

$$\begin{aligned} u_r(r,\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{1,k}(r) P_{\nu_k}(\cos\theta), \\ u_\theta(r,\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{2,k}(r) \frac{d}{d\theta} P_{\nu_k}(\cos\theta) \times \varphi(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{4,k}(r) P_{\nu_k}(\cos\theta). \end{aligned} \tag{1}$$

На відміну від [3], де індекс ν_k набуває цілих значень, у даній задачі ν_k вибирались з умови [1]

$$\frac{d}{d\theta} P_{\nu_k}(\cos\theta)|_{\theta=\theta_0} = 0. \tag{2}$$

З урахуванням умови (2) система функцій $\{P_{\nu_k}(\cos\theta)\}$ набуває необхідної властивості повноти на досліджуваному інтервалі зміни $\theta \in [0;\theta_0]$, і тому розклад (1) дає можливість отримати коректний розв'язок поставленої задачі. Співвідношення (2) не дозволяє виконати на межі довільні граничні умови, оскільки з нього (з урахуванням матеріальних залежностей та розкладу (1)) випливає, що

$$u_\theta(r,\theta_0) = 0, \quad \sigma_{r,\theta}(r,\theta_0) = 0, \quad D_\theta(r,\theta_0) = 0. \tag{3}$$

Умови (3) мають реальний фізичний зміст — це умови гладкого контакту з абсолютно жорстким непровідним тілом. Виявлені при цьому закономірності в області товщинного резонансу, що становить особливий інтерес, збережуться і при інших типах граничних умов.

Розрахунок значень індекса ν_k, які задовольняють умову (2), не становить особливої складності. Так, для сегмента з центральним кутом $\theta_0 = 40^\circ$ три перші значення відповідно дорівнюють

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = 5,8, \quad \nu_3 = 10,4.$$

Для визначення більших значень індекса ν_k можна користуватися асимптотичними формулами [1]

$$(\nu_k + 0,5)\theta_0 = (k + 0,25)\pi - \frac{3\theta_0 \operatorname{ctg}\theta_0}{8\pi} \frac{1}{k + 0,25}.$$

Підставляючи вирази (1) в рівняння відносно переміщень і електричного потенціалу, отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно трьох невідомих

$$
\begin{aligned}
& c_{55}\left(u_2'' + \frac{2}{r}u_2'\right) - \left\{\frac{1}{r^2}[2c_{55} + c_{12} + c_{11}(\mu_k - 1)] - \omega^2\right\} u_2 \\
& + \frac{1}{r}\left[\,(c_{55} + c_{13})u_1' + \frac{1}{r}(2c_{55} + c_{11} + c_{12})u_1 + (e_{15} + e_{13})u_4' + \frac{2}{r}e_{15}u_4\,\right] = 0, \\
& c_{33}\left(u_1'' + \frac{2}{r}u_1'\right) - \left\{\frac{1}{r^2}\left[\,\mu_k c_{55} - 2(c_{13} - c_{11} - c_{12})\,\right] - \bar{\omega}^2\right\} \times u_1 - \frac{\mu_k}{r}\left[\,(c_{13} + c_{55})u_2' \right. \\
& \left. + \frac{1}{r}(c_{13} - c_{55} - c_{11} - c_{12})u_2\,\right] + e_{33}u_4'' + \frac{2}{r}(e_{33} - e_{13})u_4' - \frac{\mu_k}{r^2}e_{15}u_4 = 0, \\
& -\varepsilon_{33}\left(u_4'' + \frac{2}{r}u_4'\right) + \frac{\mu_k\varepsilon_{11}}{r^2}u_4 - \frac{\mu_k}{r}\left[\,(e_{15} + e_{13})u_2' + (e_{13} - e_{15})\frac{u_2}{r} + e_{33}u_1'' \right. \\
& \left. + \frac{2}{r}(e_{13} + e_{33})u_1' + (2e_{13} - \mu_k e_{15})\frac{u_1}{r^2}\,\right] = 0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

де введено позначення $\mu_k = \nu_k(\nu_k + 1)$.

Систему (3), яка записана в безрозмірних величинах

$$
\bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00}\varepsilon_0}}, \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}^s}{\varepsilon_0}, \bar{u}_i = \frac{u_{ij}}{h}, \quad \bar{u}_4 = u_4\frac{\sqrt{\varepsilon_0/c_{00}}}{h}, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\omega^2\rho h^2}{c_{00}},
$$

де $c_{00} = 10^{10}$ Н/м^2, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ ф/м, необхідно доповнити граничними умовами на поверхнях $r = r_0 \pm h$. У нашому випадку вони мають вигляд

$$
\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \varphi = \pm 2V_0\varphi^{(0)}(\theta). \tag{5}
$$

3 Розв'язання крайової задачі та чисельний аналіз результатів

Для розв'язання крайової задачі (4), (5) скористаємося методом степеневих рядів, згідно з яким функції, що входять у систему диференціальних рівнянь, шукаються у вигляді

$$
\{u_{1,k};\ u_{2,k};\ u_{4,k}\} = \sum_{n=0}^{\infty}\{B_n^{1,k};\ B_n^{2,k};\ B_n^{4,k}\}\left(\frac{r - r_0}{h}\right)^n. \tag{6}
$$

Підставляючи вирази (6) у рівняння (4) та прирівнюючи до нуля множники при однакових степенях $(r - r_0)/h$, отримаємо систему рекурентних співвідношень, яка дозволяє виразити усі коофіцієнти $B_n^{j,k}$ через незалежні коефіцієнти $B_0^{j,k}$, $B_1^{j,k}$. Підставляючи ці співвідношення у граничні умови (5) і враховуючи те, що функцію $\varphi^{(0)}(\theta)$ можна представити у вигляді

$$
\varphi^{(0)}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_{\nu_k}(\cos\theta), \qquad a_k = \int_0^{\theta_0}\varphi^{(0)}(\theta)P_{\nu_k}(\cos\theta)d\theta,
$$

отримаємо неоднорідну лінійну систему алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $B_0^{j,k}$, $B_1^{j,k}$.

Для проведення чисельного аналізу був вибраний сферичний сегмент з наступними геометричними параметрами: $r_0 = 20$см; $2h = 0,5$см; $\theta_0 = 40°$. В матеріальних співвідношеннях для п'єзокераміки використовувалися комплексні постійні матеріалу ЦТС-19 [4]. При розрахунках досліджувались резонансні частоти коливань та якісна поведінка відповідних форм по товщині для трьох перших значень індекса поліному Лежандра: $\nu_1 = 0$; $\nu_2 = 5,8$; $\nu_3 = 10,4$. Безрозмірна частота $\bar{\omega}$ змінювалась при цьому від 0 до 10.

Як показали проведені розрахунки, із збільшенням індекса ν_k, зв'язаного з кількістю вузлових ліній на поверхні сегмента, збільшується також і число резонансів перетворювача. Якщо для $\nu_1 = 0$ («поршневі» форми) характерна наявність двох резонансів — радіального ($\omega = 0,06$) і товщинного ($\bar{\omega} = 5,4$), то для ν_2, ν_3 у досліджуваному частотному діапазоні знаходиться відповідно три і чотири резонансні частоти, причому найбільшою в усіх випадках залишається частота основного товщинного резонансу. Як показав кінематичний аналіз форм, що відповідають цим резонансним частотам, вони є товщинно-зсувними.

Необхідно також відзначити, що зі зміною ν_k резонансна частота основної товщинної моди змінюється несуттєво — від 5,46 при $\nu_1 = 0$ до 5,48 при $\nu_3 = 10,4$. Цей результат становить особливий інтерес, оскільки частково пояснює той факт, що при спробах збудження товщинної моди з «поршневою» формою руху збуджуються також і інші, близько розташовані за частотами форми з рівномірним по поверхні розподілом нормальних переміщень [2].

References

[1] Bateman G., Erdeyn A. Higher transcendental functions. Nauka, Moscow, 1965. (in Russian)

[2] Kady U. Piezoelectricity and its practical application. Izdatelstvo Inostr. Lit., Moscow, 1949. (in Russian)

[3] Loza I.A., Shulga N.A. *Axisymmetric oscillations of a hollow sphere with radial polarization*. Applied mechanics 1984, **2**, 3–8. (in Russian)

[4] Shulga N.A., Bolkisev A.M. Fluctuations of piezoelectric bodies. Naukova Dumka, Kiev, 1990. (in Russian)

Надійшло 04.03.2014

Kudzinovs'ka I.P. *Mathematical modeling and numerical calculation of forced vibrations of piezoceramic spherical segment*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 64–67.

Vibrations of a piezoceramic segment polarized along the thickness, which are excited by a harmonically time-varying difference of potential, are considered. The corresponding solution of a two-dimensional electroelasticity problem is searched in the form of Legendre polynomial expansions in combination with the power series method. The frequency spectrum and corresponding mode kinematics for the first three values of Legendre polynomial indices are investigated. Special attention is paid to the behavior of the characteristics under studying in the area of main thickness resonance.

Key words and phrases: mathematical modeling, piezoceramic spherical segment, forced harmonic vibrations, numerical calculation, frequency spectrum, kinematics of frequency modes.

Кудзиновская И.П. *Математическое моделирование и численный расчет вынужденных колебаний пьезокерамического сферического сегмента* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 64–67.

Рассматриваются колебания поляризованного по толщине пьезокерамического сегмента, возбуждаемые гармонически переменной разницей электрических потенциалов. Решение соответствующей двухмерной задачи электроупругости ищется в виде разложений по полиномам Лежандра в сочетании с методом степенных рядов. Исследуется частотный спектр и кинематика соответствующих мод для первых трех значений индекса полинома Лежандра. Особое внимание уделено поведению исследуемых характеристик в области основного толщинного резонанса.

Ключевые слова и фразы: математическое моделирование, пьезокерамический сферический сегмент, вынужденные гармонические колебания, численный расчет, частотный спектр, кинематика мод колебаний.